CAPITOLO TERZO

PRIMI TENTATIVI DI INTERPRETAZIONE DELLA LOGICA INTUIZIONISTA

1. *A. Heyting e la “logica amplificata”*

Tra le questioni che solleva la formalizzazione della logica intuizionista un capitolo importante è rappresentato dal tentativo di delineare una corretta interpretazione da attribuire a questi sistemi e di esplicitarla adeguatamente. È nostra intenzione adesso volgere l’attenzione verso i più importanti passi mossi in tale direzione. Sono tentativi questi che cercano di rendere conto di un’interpretazione della logica intuizionista precludendosi l’uso di concetti e ragionamenti che non siano accettabili intuizionisticamente. La questione è avvertita per larghi tratti indipendentemente dalla composizione di un sistema formale. Tuttavia pensiamo che il problema stesso di un’adeguata interpretazione non si sarebbe potuto porre con una certa forza se già non si fosse intravista la possibilità di un uso [127] non del tutto illegittimo della formalizzazione. In questi primi scritti si continua a discutere sulla legittimità di tale operazione ma quasi sempre come una voce di fondo che tende a riemergere di tanto in tanto, nei momenti in cui l’interpretazione maggiormente resiste a una presa o si avverte la necessità di sfumarne i contorni.

Assume a questo proposito particolare rilievo il dibattito che in quegli anni si origina da una serie di scambi di materiale tra Heyting e Freudenthal a seguito di un loro incontro al congresso di Königsberg, dibattito che ruota intorno alla prospettiva aperta da P. Levy con l’introduzione dell’idea di “dimostrabilità” nella discussione sul pensiero di Brouwer. Nello stesso anno in cui venivano pubblicati i suoi articoli relativi alla formalizzazione, Heyting interviene direttamente nel dibattito a cui avevano dato voce i lavori di Barzin, Errera, Levy e Glivenko. Quest’ultimo aveva in un certo senso risolto definitivamente la questione dal punto di vista formale dando luogo a [128] un sistema che rendeva conto fedelmente dei principi fondamentali dell’intuizionismo. Ma molti dei problemi sollevati non sono esauribili, per Heyting, senza un ulteriore approfondimento. “In due articoli eccellenti Glivenko ha esposto i principi della logica formale intuizionista. Tuttavia, nel corso della discussione cominciata con l’articolo di Barzin ed Errera, sono state sollevate varie questioni la risoluzione delle quali non dipende dalla composizione di un sistema formale, poiché concerne il significato dei termini impiegati, che varia secondo il punto di vista nel quale ci si pone”.[1]

L’attenzione di Heyting, da un lato è rivolta a sottolineare le complicazioni apportate dall’idea di dimostrabilità alla logica concepita da Glivenko, dall’altro è tesa a mettere in risalto come non sia legittimo far coincidere, come aveva fatto Levy, questa con l’affermazione brouwériana. Riprendendo in parte la terminologia di quest’ultimo, Heyting sottolinea come sia a proposito della nozione di esistenza che realisti [129] e intuizionisti divergono definitivamente. Levy, d’accordo con i realisti, ritiene che vi sia perfetta coincidenza tra il significato ordinario di “esistenza” e quanto invece si riferisce all’uso di questo termine in relazione alle entità matematiche, per cui tutti dovrebbero comprendere senza problemi questa espressione. Levy non si rende conto che, nel dominio della vita quotidiana, non è tanto

[1] A. Heyting, *Sur la logique intuitionniste*, in “Acad. Roy. De Belg. Bull. de la Cl. Des Sc.” (5), vol. 16, pp. 957-963.

l'esattezza di una parola ciò che viene ad assumere importanza, quanto la sua efficacia. Così anche i grandi sistemi filosofici hanno vissuto profonde controversie quando hanno tentato di attribuire un significato "esatto" al termine "esistere". A maggior, ragione accade di avvertire un'indesiderata incertezza e oscurità quando tentiamo di far luce sul senso di *esistenza di un'entità matematica*.

Non dovrebbe allora destare stupore secondo Heyting il fatto che Brouwer si sia trovato a rifiutare come mezzo legittimo di dimostrazione matematica un'idea, quella di esistenza, che comporta di per sé equivocità. È una critica questa i cui risvolti sono avvertibili [130] anche partendo dall'atteggiamento del realista. "Io credo che gli stessi realisti, pur continuando a credere all'esistenza trascendente delle entità matematiche, dovrebbe riconoscere l'importanza della questione di sapere come si edifica la matematica senza l'uso di quest'idea".[2]

Per gli intuizionisti il rifiuto di riconoscere alle entità matematiche la possibilità di un'esistenza fuori dalla nostra mente fa emergere la nozione di costruzione. Poiché non possiamo evitarlo completamente, il termine esistere, quando viene impiegato non può avere altro che ì1 senso di "essere costruito dalla ragione".[3] Una proposizione possiamo intenderla, per Heyting, come qualcosa che "esprime un problema, o meglio ancora una certa aspettativa che potrà essere realizzata o delusa".[4] In questo senso affermare una proposizione da un punto di vista intuizionista coincide con la constatazione della realizzazione di questa aspettativa, e cioè di [131] un fatto empirico; solo a queste condizioni possiamo parlare di "affermazione brouweriana". Levy aveva tentato di identificarla con *p è dimostrabile* ma leggeva ciò come *esiste una dimostrazione di p* e quindi riproponeva la stessa idea di esistenza trascendente implicita nell' interpretazione classica dell' affermazione *p è vero*. "Non si scappa a questa critica rimpiazzando, con Levy, *p è vero* con *p è dimostrabile*, implicando quest'ultima frase, equivalente a *esiste una dimostrazione di p*, ancora l'idea di esistenza trascendente".[5] La parola "dimostrare" deve invece assumere il senso di "dimostrare attraverso una costruzione". Heyting considera come esempio la proposizione "la costante di Eulero è razionale". Possiamo dire che questa esprime l'aspettativa di trovare due numeri interi a e b, in modo tale che sia $C = a/b$, e possiamo considerarla realizzata solo se riusciamo a indicare un modo per calcolare questi due numeri. Al contrario, rimaniamo in un'ottica dominata dalla supposizione di un'esistenza [132] intesa ancora in senso trascendente, con l'affermazione "C è razionale se esistono due interi di cui è il quoziente"[6] o, peggio ancora con "C è razionale se non è irrazionale".[7]

La negazione $\neg p$ di una proposizione p può venire, allora, interpretata come l'aspettativa di poter ridurre p a contraddizione. Non può servire invece l'interpretazione classica: *p è falsa* in quanto esprime ancora un fatto di natura trascendente. Occorre dunque considerare l'eventualità che non sia possibile dimostrare né p né $\neg p$. Abbiamo così un terzo caso; ma anche se decidiamo di designarlo in qualche modo, per esempio con p', non ci deve sfuggire che non lo possiamo considerare mai un enunciato definitivo e, quindi, non dobbiamo in questo

[2] Ivi, p. 958.
[3] *Ibidem*.
[4] *Ibidem*.
[5] Ivi, p. 959.
[6] *Ibidem*.
[7] *Ibidem*.

caso enunciare assolutamente niente. È questo il punto che sta a fondamento della logica concepita da Glivenko e quindi anche del sistema fornito da Heyting.

La doppia negazione $\vdash \neg\neg p$ assume, allora, il significato “si sa ridurre a contraddizione la supposizione che p [133] implichi contraddizione”[8] e quindi non è vincolata a $\vdash p$, che esprime un’aspettativa di altro tipo. Indichiamo poi con $+p$ (*p è dimostrabile*) l’aspettativa di poter costruire una dimostrazione di p. “La formula $\vdash +p$ ha esattamente lo stesso senso di $\vdash p$, tuttavia p non coincide con $+p$”.[9] Per mostrarlo Heyting considera le differenti implicazioni che queste formule hanno sulla supposizione di Goldbach. Questa afferma: “Tutti i numeri pari sono la somma di due numeri primi”. In questo caso con p intendiamo che, prendendo un numero pari qualsiasi, è possibile trovare due numeri primi di cui questo è la somma. Viceversa, $+p$ significa che è possibile una costruzione che ci dia la decomposizione richiesta per tutti i numeri pari contemporaneamente. In questo caso le due dimostrazioni non sono scindibili. La differenza si evidenzia invece particolarmente nel caso che vi si applichi la negazione. Infatti, una non implica necessariamente l’altra. Negare +p cioè $\vdash \neg +p$ significa affermare l’impossibilità di trovare una regola generale [134] per la decomposizione desiderata. Ma l’impossibilità di trovare tale regola non contraddice l’eventualità di poter risolvere individualmente ogni singolo caso, anzi è possibile che un giorno si giunga contemporaneamente a dimostrare l’impossibilità di portare una tale ipotesi a contraddizione. In questo caso il problema diventerebbe di fatto irresolubile e avremmo allo stesso tempo $\vdash \neg +p$ e $\vdash \neg\neg p$.

Differentemente vanno le cose se si considera il caso di una proposizione negativa; questa, infatti, esige sempre la costruzione di una contraddizione. La distinzione tra $\neg p$ e $+\neg p$ allora non ha più ragione di essere: queste due proposizioni sono di fatto equivalenti. In tutti i casi “la differenza tra p e $+p$ sparisce se p esige una costruzione”,[10] Sono indicati come equivalenti anche casi $++p$ e $+p$ in quanto “non sapremmo concepire una dimostrazione di p senza rappresentarci anche una dimostrazione della dimostrabilità di p e inversamente”.[11] Infine un altro caso di equivalenza ce lo mostra la “legge di Brouwer” tra [135] $\neg\neg\neg p$ e $\neg p$.

Combinando le due funzioni logiche $\neg$ e $+$ è possibile a questo punto dare forma a una “logica amplificata”. Possiamo, infatti, considerare ogni giudizio sul valore logico di p sempre riducibile a uno di questi sette casi forniti dallo schema di Heyting.[12]

	Proposizioni affermate	Conseguenze	Affermazioni escluse	Predicati
1.	$\vdash p$ (o $\vdash +p$)	$\vdash \neg\neg p$ $\vdash \neg\neg +p$	$\vdash \neg p$ $\vdash \neg +p$	Dimostrato (vero)
2.	$\vdash \neg p$	$\vdash \neg +p$	Tutte le altre	Contraddittorio (falso)
3.	$\vdash \neg +p$		Tutte le altre	Insolubile

[8] Ivi, p. 960.
[9] Ivi, p. 961.
[10] Ivi, p. 962.
[11] *Ibidem*. [Nota di AS. Heyting si muove all’interno di una logica modale del tipo S4 di Lewis dove il “necessario” equivale alla “necessità del necessario”. Kripke dimostrerà che S4 equivale al calcolo intuizionista sotto un’opportuna trascrizione.]
[12] Ivi, p. 963.

	$\vdash \neg\neg p$			
4.	$\vdash \neg + p$		$\vdash + p \vdash p$ $\vdash \neg\neg + p$	Indimostrabile
5.	$\vdash \neg\neg + p$	$\vdash \neg\neg p$	$\vdash \neg p$	Non indimostrabile
6.	$\vdash \neg\neg p$		$\vdash \neg p$	Non contraddittorio
7.				Non deciso (non risolto)

136 Gli unici casi che possiamo ritenere definitivi sono i primi tre. In ognuno degli altri è sempre infatti possibile che si diano successivi spostamenti. Da 4. è possibile passare a 2. o a 3., in quanto l'indimostrabile lascia aperta sia la possibilità che si possa ricondurlo a contraddizione in un momento successivo, sia, viceversa, che si possa dimostrare l'impossibilità di una tale riconduzione dando luogo così ad un caso irrisolvibile. Da 5 invece si può passare ad 1., da 6.a 5. e da 7. naturalmente a uno qualunque degli altri sei casi. Tutti gli esempi che siamo in grado di fornire si rIferiscono esclusivamente a 1., 2.,6.,7., e a Heyting non sembra probabile che si possa arrivare in breve tempo a mostrare una proposizione che non sia riconducibile a uno di questi quattro. Tuttavia ognuno dei casi descritti deve essere considerato come una possibilità logica. Cercare di individuare dove si può collocare precisamente, "in verità", una qualsiasi proposizione è di nuovo una questione che fa leva su un'idea trascendente di esistenza e di verità e come tale non compete alla matematica 137

Riformulando, dunque, il rapporto che l'idea di dimostrabilità intrattiene con l'affermazione e la negazione brouweriana è possibile, allora, dare vita a una logica amplificata di cui è una funzione. Questa logica deve considerarsi però puramente ipotetica. Averla delineata può aver significato un passo ulteriore verso la chiarificazione di alcune idee intuizioniste. Tuttavia, per Heyting lo sviluppo di una tale logica non può costituire una via privilegiata per la ricerca. "In vista del compito che incombe sui matematici intuizionisti, cioè di ricostruire tutta la matematica, non si può domandare loro che sviluppino questa logica".[13]

Heyting in questo modo dà un primo sostanziale contributo all'interpretazione della logica intuizionista; contributo che è in gran parte incompleto e non si occupa né dell'implicazione né degli altri connettivi, congiunzione e disgiunzione, di cui si interesserà più avanti. Tuttavia ci sembra particolarmente interessante come in questo scritto Heyting attribuisca alla logica un compito 138 non distante da quello che a suo tempo gli aveva conferito anche Paul Levy cioè mostrare le caselle che certi teoremi verranno forse a riempire un giorno. Chiaramente, così concepita, per il matematico intuizionista perde gran parte del suo interesse in quanto resta fondamentalmente una sistematizzazione di semplici possibilità; tuttavia proprio per questo mantiene inalterato il suo valore di strumento indispensabile per una delucidazione di alcune idee portanti dei pensiero intuizionista.

2. *Lo scambio epistolare tra Heyting e Freudenthal. L'interpretazione dell'implicazione logica*

Abbiamo visto come Heyting avesse cercato di delineare, anche se non sempre in un modo chiaro, le possibili imPlicazioni che poteva avere l'idea di mantenere distinta la semplice affermazione di una proposizione dalla sua dimostrabilità su un'interpretazione della logica intuizionista. Questa stessa idea

[13] *Ibidem*.

era quella dominante anche 139 ne1 suo intervento al congresso di Königsberg del 1930. Qui Heyting incontra Freudenthal, il quale solleva subito dei dubbi a proposito della legittimità di un tale tentativo di interpretazione delle formule logiche intuizioniste. Il dibattito che prende avvio tra i due studiosi continua per un certo periodo attraverso uno scambio epistolare. Freudenthal in una prima lettera ribadisce nuovamente le sue perplessità e chiede ulteriori chiarificazioni. Heyting in risposta, con una cartolina datata 15 settembre 1930, cerca di individuare la causa del loro differente atteggiamento nella diversa interpretazione attribuita all'implicazione logica. Per Freudenthal se p è dimostrabile lo è anche la dimostrabilità di p e viceversa. L'interpretazione che in questo caso attribuiamo all'implicazione logica $p \rightarrow q$ non è nient'altro che "se p è dimostrabile lo è anche q". È chiaro allora che in questa ottica non 'è più giustificabile una distinzione tra p e $+p$ da un punto di vista logico. 140

L'interpretazione che invece Heyting sta tentando di fare emergere per l'implicazione attribuisce a $p \rightarrow q$ il significato "l'intenzione di p contiene l'intenzione di q". Il termine "intenzione" ha infatti già qui sostituito quello sostanzialmente analogo di "aspettativa", che avevamo trovato nell'articolo precedente. In questo senso allora la distinzione non è eliminabile, a meno di non limitarci fin da subito ad affermazioni del tipo $+p$. Abbiamo, infatti, che $+p \rightarrow p$ vale ma non viceversa $p \rightarrow +p$, poiché pensare p non significa dover pensare immediatamente anche alla sua dimostrabilità, e dunque nemmeno $\neg +p \rightarrow \neg p$.

Freudenthal nella sua replica dissente dall'ipotesi di una possibile applicazione intuizionista della parola "intenzione", che vede come la fonte di una sgradevole asimmetria nell' interpretazione. A questo scopo riporta in una tabella tre possibili modi di leggere a, $\neg a$ e $a \rightarrow b$:[14] 141

	1	2	3
a	Io penso a	Io penso che a sia dimostrabile	a è dimostrato
$\neg a$	Io penso che a conduca a una contraddizione	Come accanto	a conduce a una contraddizione, o mai dimostrabile
$a \rightarrow b$	Se io penso a, allora devo pensare b	Come accanto	Se a è dimostrato, allora anche b è dimostrato

Freudenthal si riconosce nella terza interpretazione, che attribuisce anche al lavoro di Heyting Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, dove a → b veniva spiegato in termini di "se a è valida, anche b è valido". Questa è l'unica interpretazione che ritiene sostenibile intuizionisticamente (in realtà è adeguata anche da un 142 punto di vista classico). Anche la seconda parte dello schema non se ne differenzia troppo e in ogni caso non permette di considerare $\vdash \neg +p$ senza $\vdash \neg\neg p$ (per Heyting, invece, valeva come possibilità piuttosto l'accostamento di $\vdash \neg +p$ e $\vdash \neg\neg +p$).

La simmetria che porta in campo la prima di queste interpretazioni si riscontra soprattutto nel differente modo in cui approccia a rispetto a $\neg a$. Per la negazione,

[14] Lettera di H. Freudenthal a A. Heyting del 23.9.1930, citata in A.S. Troelstra, *Logic in the writings of Brouwer and Heyting*, in "Atti del convegno internazionale di storia della logica, cit. p. 205.

infatti, una definizione intuizionista è estremamente problematica sia se la vogliamo considerare direttamente da un punto di vista formale, sia se invece vogliamo fare riferimento alla proposizione che sta in contraddizione con *a*, in quanto occorrerebbe affermarla come totalità. L'intuizionista, quindi, in questo caso fa riferimento al procedimento dimostrativo e ciò è in contrasto con l'interpretazione che nella prima parte dello schema diamo di *a*. Abbiamo, infatti, accettato tra le formule valide intuizionisticamente $a \rightarrow \neg\neg a$. Con ciò possiamo intendere: $a \rightarrow \neg\neg a = +\neg+\neg a$, [143] ovvero "l'intenzione di *a* contiene l'intenzione della mancanza di contraddizione di *a*" oppure "posso pensare soltanto cose prive di contraddizione". Tutto questo è chiaramente insostenibile: "Io credo che questa conclusione renda impossibile l'interpretazione 1., cioè impedisca nella maniera più assoluta ogni applicazione puramente intuizionista della parola 'intenzione'".[15] I dubbi di Freudenthal si allargano successivamente alla possibilità stessa di ammettere in qualsiasi caso un senso intuizionista alla doppia negazione debole o in generale alla legittimità di una formalizzazione della logica intuizionista, ma in questa lettera restano tuttavia perplessità appena accennate.

Vedremo più oltre come questo dubbio continuerà a persistere con tutta la sua forza in Freudenthal anche alcuni anni dopo e in un certo senso si farà più acuto. Da parte sua Heyting accoglie parzialmente la critica di Freudenthal. Comincia infatti a rendersi conto che l'idea di intendere $a \rightarrow b$ in termini di "se penso *a* [144] devo pensare anche *b*, sia troppo imprecisa per poter servire da base a una logica; nello stesso tempo prende le distanze anche dalla sua prima formulazione in termini di *validità*, in quanto non riesce ancora a tenere conto adeguatamente della distinzione tra *a* e *a è dimostrabile*, distinzione che pure era avvertita già al tempo della stesura di quell'articolo.

Freudenthal ha ragione a notare quell'asimmetria che è effettivamente un elemento di disturbo. Per ovviarla il matematico olandese propone un'interpretazione dell'implicazione che consideri anche $a \rightarrow b$, come già la negazione, dal punto di vista del procedimento dimostrativo; $a \rightarrow b$ significa, dunque, "possiedo una costruzione, la quale deriva da ogni dimostrazione di *a* una dimostrazione di *b*".[16] Se assumiamo quest'interpretazione cade la distinzione tra $a \rightarrow b$ e $+a \rightarrow +b$, ma allo stesso tempo, al contrario da quella proposta da Freudenthal, questa lettura permette di mantenere separati *a* da *a*, cioè l'affermazione *a* presentata semplicemente come problema e [145] l'affermazione "*a* è dimostrato".[17] Questa distinzione va necessariamente mantenuta perché $a \rightarrow b$ deve poter parlare di una dimostrazione di *b* anche nel caso in cui *b* non sia stata ancora dimostrata. La precisazione comporta la modificazione dell'assioma

4.11 $a \rightarrow b. \wedge .a \rightarrow \neg b. \rightarrow \neg a.$ in
4.11* $a \rightarrow b. \wedge .a \rightarrow \neg b. \rightarrow \neg + a.$

Ciò che viene ricondotto a contraddizione è, infatti, la dimostrabilità di *a* e non la sua semplice supposizione. Con questo Heyting si trova portato a concordare con Freudenthal su uno dei punti cardini della loro discussione e cioè che il sistema

---

[15] Ivi, p. 205.
[16] Lettera di A. Heyting a H. Freudenthal del 25.10.1930, citata in A.S. Troestra, *Logic in the writings of Brouwer and Heyting*, cit., p. 207.
[17] [Nota di AS. Questa affermazione è un "giudizio". $\vdash$ è il simbolo del giudizio dell'ideografia fregeana.]

fornito da lui in precedenza era interpretabile prendendo in considerazione solo formule del tipo $+p$: “Da ciò deriva: l’apparato formale come l’ho dato nei mio svolgimento si lascia interpretare in modo che tutti i caratteri rappresentano affermazioni della forma *a è dimostrabile*”.[18] [146]

Tuttavia, sussiste per Heyting la possibilità di estendere quel sistema in più modi, tali da fargli rispettare la differenza tra p e $+p$. A questo proposito fornisce a Freudenthal alcune indicazioni tramite due proposte. La prima di queste consiste nel considerare α, β formule che non si riferiscono a una dimostrazione e aggiungere una nuova regola di operazione: “quando α è una formula giusta, così anche $+\alpha$ è una formula giusta”. Si danno inoltre nuovi assiomi che regolano il rapporto tra α e $+\alpha$:

$\vdash\vdash +\alpha \rightarrow \alpha$
$\vdash\vdash \neg\alpha \rightarrow \neg+\alpha$
$\vdash\vdash .\alpha \rightarrow \beta. \rightarrow .+(\alpha \rightarrow \beta)$

Nella seconda, invece, si introduce un doppio simbolo per la negazione: $\neg$ per la negazione della dimostrabilità e ∞ per la negazione semplice. Mantenendo le stesse regole operative e utilizzando a al posto di α si danno i seguenti nuovi assiomi: [147]

$\vdash\vdash +a \rightarrow a$
$\vdash\vdash \neg a \rightarrow \infty+\alpha$ (questa potrebbe anche essere una definizione)
$\vdash\vdash \infty a \rightarrow +\infty\alpha$
$\vdash\vdash .a \rightarrow \beta. \rightarrow .+(a \rightarrow b)$.

Una logica che si sviluppasse in una di queste direzioni risulterebbe certamente di difficile applicazione, tuttavia, facendole esprimere l’idea di dimostrabilità si raggiunge la possibilità di evidenziare come si possa pensare un problema che risulti viceversa insolubile dal punto di vista dimostrativo.

Vedremo successivamente, attraverso il lavoro di Kolmogorov sull’interpretazione della logica intuizionista, come fondamentalmente questo sia possibile già partendo dal sistema originario di Heyting, interpretandolo su “problemi” e “soluzione di problemi”. Per quel che riguarda i dubbi accennati appena da Freudenthal sulla possibilità di formalizzare la logica intuizionista, Heyting si limita a sollecitare il collega a riprenderli nuovamente e a esporli con maggiori dettagli. Da parte sua pensa che il problema riguardi più l’ammissione della stessa legittimità di una logica intuizionista [148] che non quella di una sua formalizzazione, formalizzazione che dipende in ultima istanza dall’aver accettato la sua possibilità: “se é possibile una logica, allora dovrebbe essere espressa in qualsiasi lingua, cioè dovrebbe venire formalizzata”.[19]

L’interpretazione dell’implicazione che Heyting concepisce in questo periodo è praticamente già quella che pubblicherà solo nel 1934 nel suo testo *Mathematische Grundlagenforschung*. *Intuitionismus*. *Beweistheorie*. In quello stesso anno anche Freudenthal torna sull’argomento e i due si trovano nuovamente coinvolti in una polemica che prende stavolta voce su *Compositio Mathematica*; ma, tra lo scambio epistolare del 1930 e questo dibattito che copre gli anni dal ‘34 al ‘37, viene pubblicato un altro tentativo di interpretazione della logica intuizionista di estrema

[18] Ivi, p. 207.
[19] Ivi, p. 208.

importanza e densità, destinato questa volta, a differenza del precedente lavoro dell'autore, ad avere un'immediata eco all'interno del dibattito matematico sull'intuizionismo. [149]

3. *Il calcolo dei problemi di A.N. Kolmogorov*

L'interpretazione di Kolmogorov risale al gennaio del1931, ma solo l'anno successivo viene pubblicata su *Mathematische Zeitschrift* in tedesco. Sappiamo comunque da Troelstra che in parte già per lettera Kolmogorov aveva parlato ad Heyting della possibilità di interpretare le proposizioni che esprimono l'intenzione di trovare una costruzione come *problemi*. Questa interpretazione è completamente indipendente da presupposti intuizionisti ed è sensata anche se assunta in un contesto classico. "Accanto alla logica teoretica che sistematizza gli schemi dimostrativi delle verità teoretiche, si possono sistematizzare gli schemi delle soluzioni di problemi; per esempio di problemi di costruzioni geometriche".[20] L'esempio che fornisce è quello che riguarda il "principio del sillogismo"; a questo corrisponde nel calcolo dei problemi il seguente principio: "se noi possiamo ricondurre la soluzione di *b* alla soluzione [150] di *a* e la soluzione di *c* alla soluzione di *b*, allora possiamo anche ricondurre la soluzione di *c* alla soluzione di *a*".[21]

Se vi facciamo corrispondere un simbolismo e diamo delle regole per il calcolo formale di questi problemi, non avremmo allora bisogno per la loro risoluzione di nessun assioma specifico intuizionista e in generale di nessun assioma specifico teoretico conoscitivo. Tuttavia il calcolo che otteniamo risulta perfettamente coincidente con quello proposto da Heyting. "È valido allora il seguente strano fatto: per quanto riguarda la forma il calcolo dei problemi coincide con la logica intuizionista di Brouwer recentemente formulata da Heyting",[22]

Kolmogorov non definisce direttamente il concetto di problema, ma introduce una serie di esempi che mirano a spiegarlo. Un problema è per esempio:

– trovare quattro numeri interi, x, y, z, n per i quali valgono le relazioni: $x^n + y^n = z^n$ e $n > 2$.

Come problema possiamo però indicare anche: [151]

– dimostrare la falsità della proposizione di Fermat.

Ora, dal punto di vista della logica classica gli enunciati: "la proposizione di Fermat è falsa" e "esistono numeri che soddisfano $x^n + y^n = z^n$ con $n > 2$" sono equivalenti. Tuttavia i due problemi restano ugualmente separati. Su ciò il concetto di problema si accorda con la prospettiva intuizionista per la quale la seconda formulazione non riesce a essere sufficientemente precisa.

Un problema particolare è questo: "dato il numero π espresso razionalmente $\pi = m/n$, trovare un'espressione analoga per il numero e". La premessa di questo problema è, infatti, impossibile in quanto non siamo in grado di dare due numeri che esprimano razionalmente π. Tutto il problema diventa di conseguenza privo di contenuto.

Possiamo considerare soluzione di un problema la dimostrazione della sua mancanza di contenuto. È questo un passaggio di estrema importanza nella spiegazione che [152] Kolmogorov dà di soluzione di un problema. Infatti, vedremo come con questo passaggio sia possibile interpretare come problema risolto anche

[20] A.N. Kolmogorov, *Zur Deutung der intuitionistischen Logik*, in "Math. Zeitschrift, 35, pp. 58-65.
[21] Ivi. p. 58.
[22] *Ibidem*.

quello corrispondente all'assioma 4.1 di Heyting, "la legge" cosiddetta "di Duns Scoto", che nel precedente lavoro di Kolmogorov veniva invece rifiutato.

Con questi esempi i concetti di "problema" e "soluzione di problema" risultano per il sovietico sufficientemente al riparo da fraintendimenti, tanto da poter servire da base per una logica dei problemi non meno di quanto i concetti di "proposizione" e di "dimostrazione di una proposizione" lo siano per la logica degli enunciati. È possibile allora dare delle definizioni per quei simboli che nel calcolo dei problemi corrispondono ai connettivi logici.

Contrassegnando i problemi con *a, b, c,* … possiamo dire che "se *a* e *b* sono due problemi $a \wedge b$ rappresenta il problema 'entrambi i problemi *a* e *b* sono risolti' mentre $a \vee b$ rappresenta il problema 'almeno uno dei problemi *a* e *b* vengono risolti'. Ancora è $a \rightarrow b$ il problema [153] 'supposto che venga data la soluzione di *a*, viene risolto *b*' oppure, il che è la stessa cosa, ricondurre la soluzione di *b* alla soluzione di *a*". La negazione definisce, invece, il problema "posto che la soluzione di *a* sia data, essa comporta una contraddizione".[23] L'interpretazione che Kolmogorov dà di $\neg a$ è dunque affine a quella che aveva dato Brouwer: negare *a* non coincide con il dimostrare l'irrisolubilità di *a*. Se considerassimo l'irresolubilità di *a* un concetto ben definito, avremmo comunque la possibilità di passare da $\neg a$ a questa, ma non sarebbe sempre possibile effettuare il passaggio inverso. Potremmo trovarci, infatti, di fronte a un caso per cui si può dimostrare che la soluzione di un determinato problema supera le nostre capacità senza che per questo ci sia possibile farne con seguire una contraddizione.

Occorre notare come Kolmogorov introduca qui i quattro connettivi come indipendenti l'uno dall'altro, individuando in ciò una delle differenze di maggior rilievo [154] con il calcolo degli enunciati, che lui continua ad intendere possibile solo classicamente, dove le funzioni logiche analoghe a $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\neg$ si lasciano esprimere attraverso due di loro. Questo non è possibile, invece, nel calcolo dei problemi dove le quattro funzioni sono tutte indipendenti fra loro. Ciò consente al calcolo dei problemi di diventare un'interpretazione particolarmente adeguata alla formalizzazione di Glivenko e di Heyting, che in questa caratteristica intravedevano un tratto particolarmente importante per la formalizzazione di un calcolo intuizionista.

Una formula $p(a, b, c...)$, dove *a*, *b*, *c*… indicano dei problemi, che fa uso dei simboli $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\neg$ la consideriamo essa stessa un problema. Se invece *a*, *b*, *c*,… rappresentano problemi indefiniti, consideriamo $p(a, b, c,\dots)$ come funzione delle variabili per problemi *a*, *b*, *c*,... In questo caso il simbolo $\vdash$ viene ad assumere un significato particolare. Indichiamo infatti con $\vdash p(a, b, c,...)$ il problema "dare un metodo generale per la soluzione di $p(a, b, c,...)$ [155] per ogni singola scelta dei problemi *a*, *b*, *c*,…"[24] Sono proprio i problemi espressi sotto questa forma a costituire l'oggetto del calcolo elementare dei problemi. In pratica il simbolo $\vdash p(a, b, c,...)$ prende il posto di (a)(b)(c) … $p(a, b,$ c....).

"In generale significa che se *x* è una variabile (a piacere) e $a(x)$ rappresenta un problema il cui senso dipenda dai valori di *x*, $(x)a\ (x)$ rappresenta il problema "dare un metodo generale per la soluzione di $a(x)$ per ogni singolo valore di *x*. Bisogna capirlo così: risolvere il problema $(x)a(x)$ significa essere in grado, per ogni singolo valore dato di *x*, di risolvere il problema $a(x_0)$ in base a una serie finita di passi noti fin dall'inizio (prima della scelta di x_0)".[25]

---

[23] Ivi, p. 60.
[24] *Ibidem*.
[25] *Ibidem*.

Si tratta adesso di dare alcune semplici regole di calcolo, applicabili meccanicamente, per la soluzione di problemi così espressi. La soluzione di un problema è sempre un fatto puramente soggettivo, ma quella di un problema logico o matematico ha la caratteristica di rimanere sempre valida. [156]

Questa particolarità apre alla possibilità di una comunicabilità delle soluzioni ottenute: "se io ho risolto un problema logico o matematico, posso rappresentare questa soluzione in maniera sempre comprensibile ed è necessario che venga riconosciuta come soluzione esatta, sebbene questa necessità abbia un carattere in un certo senso ideale, poiché implica un'intelligenza sufficiente da parte di chi ascolta".[26] La questione è, infatti, più complessa che non per la dimostrazione di postulati teoretici, in quanto per i problemi non vi è nessun concetto corrispondente a "esattezza di un postulato dimostrato". Kolmogorov indica due raggruppamenti di problemi di cui riteniamo conosciuta la soluzione. È una specie di "postulato" che costituisce una premessa al calcolo. Questa premessa corrisponde alla convinzione preliminare dell'esattezza degli assiomi per il calcolo degli enunciati.

Il primo di questi raggruppamenti coincide con gli assiomi forniti da Heyting per la sua formalizzazione della logica proposizionale intuizionista. Essi devono considerarsi [157] risolti in base al simbolo $\vdash$ per ogni possibile scelta dei problemi a, b, c. La lista che Kolmogorov dà del primo gruppo (A) di problemi risolti ci è `ben nota:

2.1 $\vdash a \rightarrow a \wedge a$
2.11 $\vdash (a \wedge b) \rightarrow (b \wedge a)$
2.12 $\vdash (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c))$
2.13 $\vdash ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$
2.14 $\vdash b \rightarrow (a \rightarrow b)$
2.15 $\vdash (a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow b$
3.1 $\vdash a \rightarrow a \vee b$
3.11 $\vdash a \vee b \rightarrow b \vee a$
3.12 $\vdash (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow c)$
4.1 $\vdash \neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$
4.11 $\vdash ((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow \neg b)) \rightarrow \neg a$.

Vediamo dunque che compare anche il problema 4.1. Abbiamo già premesso come la possIbilità di annettere questo problema alla lista di quelli da considerarsi risolti è data dall'intendere un "problema dimostrato privo di senso come risolto. Infatti, questa formula rappresenta per Kolmogorov il problema: "appena è [158] risolto $\neg a$ la soluzione di a diventa impossibile e il problema $a \rightarrow b$ privo di senso".[27]

Il secondo raggruppamento (B) contiene tre problemi che non si lasciano esprimere simbolicamente:

I se $\vdash p \wedge q$ è risolto, risolvo anche $\vdash p$
II se $\vdash p$ e $\vdash p \rightarrow q$ sono risolti, risolvo anche $\vdash q$
III se $\vdash p(a, b, c\ldots)$ è risolto, risolvo anche $\vdash p(q, r, s, \ldots)$

[26] Ivi, p. 61.
[27] Ivi, p. 62.

A questo punto le regole del calcolo dei problemi vengono date da Kolmogorov in modo che i problemi del gruppo A rappresentino una lista di problemi risolti "fin dall'inizio" e quelli dei gruppo B modi per annettere nuovi problemi a questa lista. Queste regole sono quattro:

1) prima di tutto portiamo sulla lista dei problemi risolti i problemi del gruppo A;

2) quando sulla nostra lista c'è già $\vdash p \wedge q$, è permesso portarvi anche $\vdash p$;

3) quando entrambe le formule $\vdash p$ e $\vdash p \rightarrow q$ vi sono già, possiamo portarvi anche $\vdash q$;

4) quando $\vdash p(a, b, c...)$ è già nella lista e $q, r, s, \ldots$ [159] sono funzioni elementari di un problema qualsiasi, è permesso portarvi anche $p(q, r, s...)$.

Il calcolo che prende forma da queste regole corrisponde perfettamente al calcolo di Heyting, cioè è possibile considerare come problemi risolti tutte le formule e solo quelle formule che si dimostrano nella formalizzazione. che aveva dato l'olandese nel suo articolo del 1930. Di conseguenza è possibile interpretare correttamente tutte quelle formule come "problemi". Kolmogorov mostra. soltanto alcuni esempi tra i più importanti. Sono da considerare risolti problemi quali la "legge di contrapposizione debole", la "legge della doppia negazione debole", la "legge di Brouwer". Non 'è possibile invece, "a meno di non considerarsi onnisciente",[28] aggiungere alla lista dei problemi risolti il problema che rappresenta il "principio del terzo escluso" della logica degli enunciati. Questo problema affermerebbe infatti: "si è dato un metodo generale per trovare o una soluzione per ogni problema a, oppure per conseguire una contraddizione dall'aver dato la soluzione"[29] e questa è una condizione palesemente [160] irraggiungibile.

Si risolve invece il problema che rappresenta l'affermazione brouweriana di non contraddittorietà del "principio del terzo escluso":

4.8 $\vdash \neg\neg\, (a \vee \neg a)$.

Questo equivale a dire che non abbiamo la possibilità di indicare problemi che siano dimostrabili come non risolvibili. Di conseguenza non può apparire "la legge della doppia negazione", poiché $\vdash \neg\neg a \rightarrow a$ con l'aiuto di 4.8 porterebbe a dimostrare come risolvibile il problema che rappresenta il " principio del terzo escluso".[30] Si deve quindi tener distinto il problema dalla sua doppia negazione.

È inoltre importante notare come nel calcolo dei problemi si mantenga uno dei risultati fondamentali a cui era giunto Glivenko. "Si noti inoltre che quando una formula $\vdash p$ nella logica degli enunciati classica è falsa non può essere risolto il problema corrispondente $\vdash p$. Si può infatti dedurre da una simile formula $\vdash p$ con l'aiuto di formule precedentemente date e regole del calcolo dei problemi. [161] la formula apertamente contraddittoria $\vdash \neg a$".[31]

---

[28] Ivi, p. 63.

[29] *Ibidem*.

[30] [Nota di AS. Nella legge di doppia negazione forte sostituendo ad a la formula del terzo escluso, si ottiene $\vdash \neg\neg\, (a \vee \neg a) \rightarrow (a \vee \neg a)$. Ma, per la 4.8, $\vdash \neg\neg\, (a \vee \neg a)$, quindi per *modus ponens* $\vdash (a \vee \neg a)$. Questo ragionamento è classico ma non intuizionista in quanto presuppone la validità della doppia negazione forte. Bisogna porre attenzione nello sviluppare considerazioni metalogiche sulla logica intuizionista, perché si cade facilmente nella logica classica.]

[31] Ivi, p. 64.

Ma Kolmogorov non si accontenta di considerare l'interpretazione della logica intuizionista in termini di problemi solo come una possibile interpretazione fra le altre. Per il sovietico vedere le formule della logica intuizionista in termini di problemi e soluzioni permette di dar loro una luce nuova. Gli oggetti di questa logica, infatti, non sono in realtà postulati teoretici.

La critica di Brouwer parte da questo principio fondamentale: "Ogni enunciato che non sia privo di senso deve indicare uno o più dati di fatto oltremodo determinati e accessibili alla nostra esperienza".[32] Da questo assunto l'intuizionismo fa derivare innanzitutto una critica alla negazione, della quale dà una nuova definizione: invece che "*a* è falso", "*a* conduce a contraddizione". Adesso negare significa affermare un enunciato esistenziale "esiste una costruzione, la quale nella supposizione dell'esattezza di *a*, conduce a contraddizione".[33]

Ma anche l'enunciato esistenziale è sottoposto a una [162] critica analoga: se non si fornisce una costruzione corrispondente a tale enunciato, questo non può essere formulato. Ciò per Kolmogorov è quasi come dire che finché non mostriamo questa costruzione, cioè forniamo l'elemento a cui ci conduce, l'enunciato è falso e solo successivamente diventa vero. Gli enunciati esistenziali, come li considera Brouwer, sono allora particolari: non variano di contenuto con il passare del tempo, ma non possono venire espressi se non sotto determinate condizioni. Si tratta allora solo di una finzione. Questo enunciato per Kolmogorov esiste come problema indipendentemente dalla condizione della nostre conoscenze. Questo problema ha di per sé un senso preciso e trovare quell'elemento che lo risolve ne è un momento distinto che trasforma il problema in un "enunciato empirico". Ciò che Brouwer ha voluto intendere per "enunciato esistenziale" va considerato per Kolmogorov come scisso in due elementi: uno oggettivo, il problema, l'altro soggettivo, la sua soluzione. [163] "In questo modo non rimane nessun oggetto che si possa definire come enunciato esistenziale vero e proprio".[34]

La critica che l'intuizionismo ha formulato nei confronti degli enunciati negativi si deve allora intendere come l'interdizione a considerare come enunciato definito la negazione di un enunciato universale qualunque. La critica intuizionista diventerebbe allora inadeguata se considerasse come suo proprio oggetto il postulato teoretico. Dovremo perlomeno domandarci quale logica potrebbe valere per enunciati la cui negazione non può essere considerata sensata. "Per la matematica ne consegue che si deve considerare la soluzione di problemi come proprio scopo tipico accanto alla dimostrazione di enunciati teoretici".[35] Il calcolo dei problemi deve dunque prendere il posto della logica intuizionista, in quanto gli oggetti di cui questa parla si sono rivelati essere non postulati teoretici, ma problemi.

È degno di nota che Kolmogorov consideri fin dall'epoca della pubblicazione di questo articolo la sua interpretazione [164] come "strettamente collegata" a quella di Heyting in termini di "intenzione di una costruzione matematica", alla quale a suo avviso manca solo una chiara differenziazione tra enunciati e problemi. Heyting concorda in generale con la sensazione di stretta vicinanza tra le due interpretazioni, anche se in un primo momento le ritiene fondamentalmente distinte. Solo in seguito l'interpretazione di Kolmogorov si rivelerà più adatta a render conto della distinzione, che stava a cuore a Heyting evidenziare, fra pensare un problema e risolverlo dal

---

[32] *Ibidem*.
[33] *Ibidem*.
[34] Ivi, p. 65.
[35] *Ibidem*.

punto di vista dimostrativo. Questa gli permetteva, infatti, di non dover ricorrere a estensioni particolari del suo sistema originario. Già nel 1935, rispondendo a Freudenthal, Heyting imposta la sua replica dal punto di vista del calcolo dei problemi, dando l'impressione di aver accolto in pieno l'indicazione di Kolmogorov di ritenere i "problemi" come il vero oggetto di una supposta logica intuizionista.

Tuttavia, occorre ricordare che l'interesse di Heyting per l'interpretazione di Kolmogorov fu immediata e, [165] già nel periodo in cui la vede ancora distinta dalla sua, propone un'estensione di questa ai quantificatori. Il quantificatore universale $(x)A(x)$ può essere visto come il problema: "Indicare un metodo generale per il quale il problema A si lascia risolvere per una x qualunque".[36] L'esistenziale $(Ex)A(x)$ invece il problema: "Indicare una x definita e per questa x soluzione del problema A".[37] Naturalmente i due concetti non sono equivalenti.

4. *L'interpretazione delle formule logiche intuizioniste di R Freudenthal*

Alla luce del lavoro di Kolmogorov si riapre anche il dibattito con Freudenthal. Heyting pubblica nel 1934 il suo *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie*. Questo testo originariamente doveva essere scritto in collaborazione con Kurt Gödel, il quale doveva occuparsi della parte riservata al logicismo, ma la lentezza di Gödel nel procedere con il lavoro [166] aveva portato gli editori a rimandare un'eventuale pubblicazione di questa parte a un secondo tempo. Gödel, invece, non portò mai a termine tale lavoro. Abbiamo già accennato come in questo testo Heyting si fosse interessato al lavoro di Kolmogorov, estendendo la sua interpretazione ai quantificatori, ma l'importanza di quel libro è soprattutto legata alla chiara esposizione che fornisce di tutto il quadro del dibattito di quegli anni intorno a Brouwer e all'intuizionismo. Per quel che riguarda l'interpretazione della logica intuizionista, Heyting ripropone in generale l'idea che si era venuta configurando dal suo scambio epistolare con Freudenthal. In particolare fornisce per la prima volta una formulazione compiuta per il caso dell'implicazione logica. La questione è ripresa in questi termini: "Ciascuna proposizione significa (...) "l'intenzione" di una costruzione matematica che deve soddisfare determinate condizioni. La dimostrazione di una proposizione consiste nella realizzazione della costruzione [167] che essa esige. $a \rightarrow b$ rappresenta, allora, l'intenzione di una costruzione che, da ogni dimostrazione per a, conduce a una dimostrazione per b".[38]

In quello stesso anno Hans Freudenthal scrive il suo articolo *Sull'interpretazione intuizionista di formule logiche*, che verrà pubblicato solo successivamente nel 1937 accanto alla replica dell'olandese. Freudenthal considera l'interpretazione di Kolmogorov e quella di Heyting come immediatamente equivalenti ed entrambe fondate sulla distinzione tra proposizione e dimostrazione. È da notare a questo proposito che Freudenthal è il primo a parlare delle due interpretazioni come pressoché coincidenti. La distinzione tra "problemi" e "soluzione di problemi" traccia infatti nuovamente una separazione analoga a quella tentata dall'olandese. È questa separazione che fa mancare a entrambi il loro obiettivo. "Heyting intende le proposizioni come intenzioni di costruzioni, Kolmogorov in quanto problemi e ciò

---

[36] A. Heyting, *Les fondaments des mathématiques. Intuitionnisme. La théorie de la démonstration*, cit. p. 21.
[37] Ivi, p. 21.
[38] Ivi, p. 17.

non rappresenta una grande differenza. In entrambi i casi [168] abbiamo delle spiegazioni, ma, come vedremo, spiegazioni non intuizioniste di formule logiche".[39]

In un'ottica intuizionista, infatti, le proposizioni vanno necessariamente insieme alla loro dimostrazione, poiché appena formulate la contengono automaticamente. È questa una conseguenza della spiegazione più immediata che dal punto di vista intuizionista diamo a una proposizione, ovvero "constatazione di un dato di fatto della cui indubitabilità ci siamo convinti attraverso una dimostrazione, cioè attraverso una costruzione dei rapporti contenuti nella proposizione".[40] In questo senso, allora, nessuna separazione tra la proposizione e la sua dimostrazione può considerarsi legittima. La proposizione diventa "soltanto un orientamento casuale e breve, una specie di titolo"[41] ed è invece la dimostrazione a costituire la proposizione vera e propria.

In un primo tempo può sembrare, che a questo faccia eccezione il caso di una proposizione negativa. Ciò è dovuto soprattutto alla confusione che regna intorno [169] alla sua interpretazione. Quella più vicina all'idea di Heyting e Kolmogorov vede come scopo di una proposizione negativa quello di portare alla costruzione di una contraddizione. È questa una spiegazione che non contribuisce a nessun tipo di chiarificazione e anzi rimane fondamentalmente nebulosa. Infatti, per Freudenthal "non è assolutamente chiaro come qualsiasi cosa che sia stata effettivamente data possa contenere una contraddizione, e soprattutto che cosa si debba intendere qui per contraddizione".[42] L'interpretazione che a suo avviso emerge in un'ottica intuizionista della proposizione negativa afferma che "tutti i tentativi di costruzione con uno scopo preciso falliscono".[43] Freudenthal intende dunque la negazione proprio, come "indimostrabilità", accostamento questo che sia Heyting che Kolmogorov nelle loro interpretazioni avevano apertamente respinto. La conseguenza è che per lui adesso non ha più senso considerare la possibilità di proposizioni che non siano né vere né assurde "perché, che una proposizione non sia dimostrabile, non è altro [170] che il fallimento di tutti i procedimenti dimostrativi, cioè la falsità della proposizione stessa".[44]

In questi passaggi, a nostro avviso, Freudenthal si trova nella sua interpretazione molto vicino all'idea che aveva tracciato Levy intorno alla proposizione brouweriana, ma l'attenzione di Freudenthal è rivolta soprattutto al caso dell'implicazione logica. È nella spiegazione che si riferisce a questo connettivo che emergono per lui le maggiori difficoltà, incontro alle quali vanno per lo più tutti i precedenti tentativi di interpretazione della logica intuizionista. Occorre inoltre notare come tutto il lavoro dell'autore si indirizzi come critica al termine stesso "logica intuizionista", termine che soprattutto nell'articolo di Kolmogorov, a suo avviso, "purtroppo diventa sempre più popolare, ma comunica un'interpretazione sbagliata della matematica intuizionista".[45]

L'interpretazione data da Heyting e Kolmogorov vedeva in $a \to b$ il tentativo di dare una costruzione che trasforma una dimostrazione di a in una dimostrazione di b o il

[39] H. Freudenthal, *Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln*, in "Compositio math.", 4, 1936, pp. 112-116.
[40] Ivi, p. 112.
[41] *Ibidem*.
[42] Ivi, p. 113.
[43] *Ibidem*.
[44] *Ibidem*, nota 1.
[45] *Ibidem*, nota 3.

171 ricondurre la soluzione di *b* a quella di *a*. Questa interpretazione sembra ammettere come materiale di costruzione anche l'ipotesi di dimostrabilità. Ciò per Freudenthal è fondamentalmente scorretto e una dimostrazione ipotetica resta priva di senso allorché la si voglia fare intervenire nel corso della costruzione. "Una supposizione e cioè quella che *a* sia dimostrabile non è un materiale di costruzione, sia pure il suo valore euristico grande quanto si vuole".[46]

Ma lo scoglio principale è dato dal fatto che Heyting e Kolmogorov non danno informazioni sufficienti sulla forma della proposizione alla quale tendiamo ode). problema posto. Per Freudenthal "la formulazione precisa di una proposizione è la sua dimostrazione".[47] Tenendo presente questo, è possibile mostrare dove cadono le precedenti interpretazioni. Ciò che viene asserito da Heyting e Kolmogorov con $a \to b$ è, infatti, "una dimostrazione di *b* dove per strada viene fornita anche una dimostrazione di *a*"[48] ma nello stesso tempo *a* deve essersi già dimostrata giusta se non vogliamo far intervenire come materiale 172 di costruzione una mera supposizione. La conseguenza principale è dunque di accantonare totalmente il valore stesso dell'implicazione.

Gli esempi forniti da Kolmogorov non riescono a mettere a fuoco questa difficoltà. Freudenthal considera il problema: "dalla razionalità della costante di Eulero risulta quella della sua radice quadrata". Perché la premessa sia formulata esattamente non basta supporre l'esistenza di due numeri naturali *m* e *n*, di cui la costante di Eulero rappresenterebbe il quoziente; deve invece per Freudenthal intervenire direttamente il loro valore numerico come condizione necessaria per proseguire il procedimento. "Così sarà in generale: per formulare o dimostrare la conclusione sarà necessario che si conoscano i fatti espliciti che sono stati dati per la premessa e in questo è innanzitutto inclusa la dimostrazione della premessa. Nell'interpretazione di Heyting e Kolmogorov ii valore dell'implicazione diventa illusorio perché la premessa, nella sua qualità di premessa, elimina subito se stessa".[49] 173

Lo stesso problema si presenta in logica classica, ma lì è possibile aggirarlo attribuendo ad $a \to b$ il senso di $\neg a \vee b$, cosa che non è permessa invece da un punto di vista intuizionista, dove vale solo il versante debole della "legge di Filone Megarico", ossia $\neg a \vee b \to (a \to b)$ e non viceversa.

Vi è una serie di proposizioni che risultano particolarmente interessanti, se portiamo la nostra interrogazione sulla natura del loro soggetto: queste sono le proposizioni universali. In proposizioni come: "una funzione realizzata in (0 1) è infinitamente continua" oppure "una funzione di numeri interi su un insieme finito ha un massimo", il soggetto non è né "una funzione determinata" né "ogni funzione particolare", poiché anche quest'ultimo come soggetto resterebbe ancora troppo nebuloso per entrare in una costruzione. Bisogna intendere il soggetto non tanto come già formato, determinato, ma nel suo *libero divenire*. Le nostre proposizioni parlano su cose che stanno sviluppandosi e limitano questo loro divenire parlando di particolari caratteristiche che è possibile attribuire loro. 174 in questo senso possiamo dare un'interpretazione dell'implicazione che ne rispetti tutto il valore: "$a \to b$ è una proposizione che tratta di due predicati dello stesso soggetto, due predicati il cui contenuto è la limitazione del libero divenire del soggetto".'[50] Così facendo però

---

[46] Ivi, p. 114.
[47] *Ibidem*.
[48] *Ibidem*.
[49] Ivi, p. 115.
[50] *Ibidem*.

l'interpretazione dell'implicazione si rivolge alle sole proposizioni universali ed è sensata solo nel calcolo dei predicati.

Si può obiettare allora che in questo modo occorre fornire indicazioni su coma sia possibile estrarre proposizioni particolari da quelle universali così concepite. Ma secondo Freudenthal questa non è una domanda di grande interesse. Infatti tutte le volte che nel corso di una dimostrazione utilizziamo una proposizione, occorre dimostrarla effettivamente calcolando il caso particolare che è quello di ci abbiamo veramente bisogno. In questo modo il valore della dimostrazione di una proposizione in universale si restringe notevolmente. "Se nel corso di una dimostrazione bisogna applicare cento volte la proposizione principale degli insiemi finiti, allora c'è da dimostrarla di nuovo cento volte, [175] perché nella nostra dimostrazione abbiamo veramente bisogno di quel massimo della funzione di numeri interi che ci è comunicata dalla proposizione fondamentale degli insiemI finiti e l'algoritmo grazie al quale lo abbiamo trovato è identico a tutta la dimostrazione della proposizione fondamentale. Ogni volta occorre di nuovo passare per tutte le dimostrazioni della proposizione fondamentale e la dimostrazione universale che abbiamo trovato una volta non ci serve più di una cartina che certamente ci rende più facile la salita al monte, ma che non ce la risparmia".[51] Questo vale anche per quelle proposizioni che si mostrano come formule esplicite, come per esempio $m+n = n+m$, per la quale, ogni volta che la incontriamo, occorre rieffettuare il cambio di ordine a cui fa riferimento. Questo naturalmente non appare nella presentazione linguistica, ma non è un'obiezione che secondo l'autore si possa rivolgere contro la sua interpretazione. Casomai ciò che si mette così nuovamente in evidenza sono i limiti contro i quali si imbatte la veste formale di un [176] sistema intuizionista. In ogni caso per Freudenthal questo è l'unico punto di vista per cui delle formule logiche "possano riflettere qualcosa di più della struttura grammaticale delle proposizioni intuizioniste".[52] La posizione di Freudenthal resta dunque piuttosto scettica nei confronti della possibilità di una logica intuizionista degna di questo nome. I dubbi che già nello scambio epistolare con Heyting aveva sollevato intorno a questa possibilità ci sembrano in qualche modo consolidati e rafforzati. Per certi aspetti la sua interpretazione sembra ancora far capo a quelle obiezioni che nel primo capitolo abbiamo cercato di vedere come il nucleo originario di questo dibattito sull'intuizionismo, anche se il lavoro di Freudenthal è animato da una comprensione ben più ampia dei nodi cruciali del pensiero intuizionista. La sua visione resta comunque inscritta in una concezione limitativa dell'intuizionismo, cioè nell'idea di questo pensiero come teso prevalentemente a imporre limiti e a ridurre la libertà nella formazione [177] dei concetti matematici e il campo di applicazione della logica, non cogliendo come, la critica intuizionista non voleva essere e non era una critica solamente in negativo.

L'anno, successivo Heyting replica a Freudenthal con una serie di annotazioni. Ciò che non ha colto Freudenthal è che un problema non è l'espressione per un fatto. Se così fosse, infatti, il tedesco avrebbe certamente ragione, poiché "gli unici fatti nella matematica intuizionista sono le dimostrazioni e le costruzioni matematiche".[53] Ma un problema è qualcosa di ben diverso e ricerca piuttosto un metodo generale: "In un problema sono dati sistemi matematici determinati; si cerca un sistema matematico

---

[51] Ivi, p. 116.
[52] *Ibidem*.
[53] A. Heyting, *Bemerkungen zun Aufsatz von Herrn Freudenthal "Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln*, in "Compositio math." 4, 1936, pp. 117-118.

che contiene tutti i sistemi”.[54] Questo fraintendimento permea tutto l’articolo di Freudenthal. Nell’esempio che fa sulla razionalità della costante di Eulero e della sua radice quadrata è così portato a esigere che si possa fornire il valore numerico di m e n tali che $C = m/n$. Questo non è assolutamente necessario. Ciò che invece è interessante, perché al problema sia collegato un senso è che si possa dare una [178] qualsiasi forma possibile alla sua soluzione. Nel caso della costante di Eulero per Heyting possiamo parlare di soluzione se, per esempio, dalle tre equazioni

1) la definizione della costante di Eulero
2) $C = m/n$
3) $(m, n) = 1$

attraverso trasformazione, otteniamo m e n in forma quadrata:

$$m = (\varphi(m, n))^2$$
$$n = (\psi(m, n))^2$$

dove φ e ψ sono funzioni di numeri interi.

Anche la critica fatta all’interpretazione dell’implicazione non coglie nel segno. Heyting fornisce un esempio con il quale vuole mostrare come non sia indispensabile conoscere sempre la soluzione di a perché $a \rightarrow b$ possa essere risolto. Se, infatti con a intendiamo il problema “nello sviluppo decimale di π trovare una sequenza di cifre 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9” e con b il problema “trovare nello sviluppo decimale di π una sequenza di cifre 0 1 2 3 4 5 6 7 8”, pur non conoscendo la soluzione di a [179] possiamo, con una costruzione molto semplice, ricondurre quella di b a questa.

5. *K. Gödel: l’introduzione del simbolo B*

Uno dei contributi più interessanti all’interpretazione della logica intuizionista è rappresentato da alcuni articoli di Kurt G3del apparsi su *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* tra il 1932 e il 1933. Sono tre dei tredici brevi contributi che all’inizio degli anni ‘30 Gödel aveva pubblicato su quella rivista e che trattavano diversi argomenti sui quali era intervenuto ai seminari di Karl Menger. Lo studioso austriaco, pur collocandosi su posizioni distanti, da quelle intuizioniste, mostra in questi anni un forte interesse nei confronti dello studio e dell’approfondimento del pensiero brouweriano, approfondimento teso soprattutto in direzione del tentativo di delineare una più corretta valutazione dei rapporti di forza che sussistono tra la teoria classica e quella intuizionista come [180] si era venuta precisando attraverso il lavoro di formalizzazione di Heyting.

Con Gödel si ha già un certo distacco dalla problematizzazione intorno alla legittimità stessa della logica intuizionista. Il sistema di Heyting, infatti, è ormai assunto come base per l’indagine dei concetti intuizionisti e non più come un ipotetico punto di arrivo. Gödel comincia inoltre a interessarsi allo studio di alcune proprietà formali del sistema intuizionista che lo differenziano da quello usuale, senza la preoccupazione, che caratterizzava invece i primi sforzi in questa direzione, di attenersi rigidamente ai soli strumenti e mezzi concettuali intuizionisti.

La prima di queste memorie rappresenta un contributo iniziale all’interpretabilità in termini di tavole di verità del calcolo proposizionale intuizionista. Vi si stabilisce

---

[54] Ivi, p. 117.

infatti che non è possibile considerare il sistema di Heyting come un sistema logico con un numero finito di valori. [181]

1. *Non c'è nessuna realizzazione con un numero finito di elementi (valori di verità) per la quale tutte e sole le formule dimostrabili in H siano soddisfatte, cioè diano valori privilegiati per ogni sostituzione.*[55]

Considerando solo un numero finito di valori di verità non vale, a differenza di quanto avviene nel caso classico, il "teorema dì completezza" per il calcolo proposizionale intuizionista. Inoltre Gödel fornisce anche un primo contributo allo studio delle logiche proposizionali intermedie. È, infatti, possibile dimostrare che, chiamando *A* (*Aussagenkalkül*) la logica proposizionale classica e *H* il sistema di Heyting :

2. *Tra H e il sistema A del calcolo proposizionale usuale si trova un numero infinito di sistemi cioè esiste una successione monotona decrescente di sistemi tali che ognuno di essi contiene H ed è contenuto in A.*[56]

A questo proposito Troelstra nota come in ultima istanza 1. non sia altro che una conseguenza di questo secondo risultato, poiché possiamo mostrare senza difficoltà che una logica qualunque che sia possibile caratterizzare con un insieme [182] finito di valori di verità e che contenga inoltre *H* ha soltanto un numero finito di rafforzamenti propri.[57] Gödel giunge inoltre a un risultato interessante per quanto riguarda lo studio delle proprietà formali del sistema *H*. Questo, infatti, a differenza del sistema classico è "primo", cioè se dimostriamo in *H* la formula $\alpha \vee \beta$, allora dimostriamo in *H* α oppure dimostriamo in H β. "Vale d'altronde in maniera affatto generale che una formula della forma $A \vee B$ è dimostrabile in H soltanto nel caso in cui o *A* o *B* è dimostrabile in *H*".[58]

Ma l'articolo di Gödel che sicuramente ha avuto più risonanza è quello che riproduce il suo intervento al seminario di Karl Menger a Vienna nel 1932, dove ottiene una serie di risultati notevoli e per larga parte inaspettati intorno ai rapporti sussistenti tra logica e matematica intuizioniste e classiche. Gödel innanzitutto mostra come, nonostante il calcolo proposizionale intuizionista sia in un modo piuttosto semplice un sottosistema del del calcolo proposizionale classico [183] (in quanto, come abbiamo già visto altrove,[59] in un certo senso è possibile ottenerlo semplicemente eliminando alcuni assiomi da quest'ultimo), abbiamo la possibilità, con una apposita traduzione, di dimostrare la validità del contrario. "Se ai concetti primitivi del calcolo proposizionale di Heyting si fanno corrispondere quelli che nel calcolo classico vengono indicati con gli stessi simboli, e all'"assurdo" ($\neg$) si fa corrispondere la

---

[55] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Aussagenkalkül*, in "Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums", IV, 1931-32. p. 40, trad. C. Bertini in *Dalla logica alla metalogica*, cit., pp.151-152.
[56] Ivi, p. 151.
[57] A.S. Troelstra, "Introductory note to 1932", in *Kurt Gödel Collected Works*, a cura di S. Feferman, Oxford University Press, New York – Clarendon Press, Oxford 1986, pp. 222-223, trad. S. Bozzi, Bollati Boringhieri, Torino 1999. p. 158-159.
[58] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Aussagenkalkül*, cit., p. 152.
[59] [Nota di AS. Dove?]

negazione (~), il calcolo proposizionale intuizionista *H* si presenta come un sottosistema proprio dell'usuale *A*.

Con una diversa associazione tra concetti (traduzione) avviene il contrario: *il calcolo proposizionale classico è un sottosistema di quello intuizionista*.[60] La dimostrazione è possibile ottenerla, per ammissione dello stesso Gödel, grazie a uno dei risultati stabiliti da Glivenko, cioè: "Se la falsità di una certa espressione della logica proposizionale è dimostrabile nella logica classica, questa stessa falsità è dimostrabile nella logica brouweriana".[61] Infatti, è questo teorema che ci permette innanzitutto di mostrare la validità dell'asserzione di Gödel per ogni [184] formula costruita soltanto attraverso congiunzioni e negazioni. Queste si presentano in generale sotto la forma $\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \ldots \wedge \neg A_n$. Gödel parte dall'ipotesi che tale formula sia valida in *A*. Ne consegue allora banalmente che ciascun $\neg A_i$ debba essere a sua volta valida *A*. Per il risultato summenzionato di Glivenko abbiamo $\neg A_i$ dimostrabile anche in *H* e con ciò anche la congiunzioni dei differenti $\neg A_i$. Per mostrare allora che ogni formula classica è possibile considerarla valida anche in *H*, Gödel opera un'opportuna traduzione che trasformi i tradizionali concetti classici $\sim p$, $p \rightarrow q$, $p \vee q$, $p\, .\, q$ negli intuizionisti $\neg p$, $\neg(p \wedge \neg q)$, $\neg(\neg p \wedge \neg q)$, $p \wedge q$ dove appaiono solamente combinazioni di $\neg$ con $\wedge$.

Ora, l'interesse di Gödel è rivolto a estendere questo risultato al caso dell'aritmetica. "Lo scopo della presente ricerca è di mostrare che qualcosa di simile vale anche per l'*intera aritmetica e teoria dei numeri* nell'estensione data, per esempio, dagli assiomi di Herbrand. Anche qui si può dare una interpretazione dei concetti [185] classici mediante quelli intuizionisti in maniera tale che tutte le proposizioni dimostrabili a partire dagli assiomi classici valgono anche per l'intuizionismo".[62]

Il sistema di Herbrand considera come simboli primitivi:

1. Le operazioni del calcolo proposizionale ~, →, ∨, ..
2. Le variabili numeriche x, y, z, ...
3. Il quantificatore universale: (x), (y), …
4. =
5. 0 e +1
6. L'insieme numerabile dei simboli per funzioni f_i, introdotti sulla base del gruppo di assiomi *C*, a ciascuno dei quali è associato un numero n_i (il numero dei posti).

Si definisce inoltre ricorsivamente il termine "espressione numerica" nel modo seguente:

1. 0 e tutte le variabili x, y, … sono espressioni numeriche.
2. Se Z è un'espressione numerica, tale è anche $Z+1$.
3. Se $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n(i)}$ sono espressioni numeriche, tale è anche $f_i(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n(i)})$.

Si giunge così a dare una definizione di "formula elementare" [186] e di "formula sensata della teoria dei numeri". Con la prima si intende "un'espressione della forma

---

[60] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*, in "Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums", IV, 1931-32. p. 40, trad. C. Bertini in *Dalla logica alla metalogica*, cit., pp. 159.

[61] V. Glivenko, *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, cit., p. 183.

[62] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*, cit., p. p. 160.

$Z_1 = Z_2$, dove Z_1 e Z_2 sono espressioni numeriche”,[63] con la seconda invece si comprende sia le formula elementari sia quelle costruite da queste attraverso le operazioni del calcolo proposizionale e del quantificatore universale (x), (y). Le formule sensate della teoria dei numeri vengono successivamente indicate da Gödel con “Z-formule”.

Herbrand aveva dato quattro gruppi di assiomi non logici indicati con le prime quattro lettere dell’alfabeto. Nei primi tre, i gruppi A, B e C, si davano gli assiomi usuali per l’uguaglianza e il successore, i differenti casi dello, schema di induzione e gli assiomi definitori per funzioni e in particolare per funzioni ricorsive primitive. Il quarto gruppo, gruppo D, comprendeva tutte le asserzioni universali che sono dimostrabili in modo finitistico, ovvero attraverso un numero finito di manipolazioni di configurazioni combinatoriali presentate finitamente.[64] 187

A differenza di Herbrand, che non li aveva introdotti esplicitamente, Gödel individua altri tre gruppi per gli assiomi logici:

E. Ogni espressione che sia stata ottenuta da una formula valida del calcolo proposizionale, sostituendo Z-formule alle variabili, vale come assioma.

F. Tutte le formule della forma: $(x)F(x) \rightarrow F(z)$, dove $F(x)$ è una Z-formula qualsiasi e Z è un’espressione numerica, sono assiomi (con l’ovvia limitazione che le variabili di Z non possano essere vincolate in F).

G. Tutte le formule della forma: $x = y. \rightarrow .F(x) \rightarrow F(y)$ (dove $F(x)$ è una Z-formula qualsiasi) sono assiomi.

E infine le seguenti regole di inferenza:

I. da A e da $A \rightarrow B$ segue B.

II. da $A \rightarrow B$ segue $A \rightarrow (x)B$, se x non è libera in A.

Gödel delinea adesso un sistema H' come controparte intuizionista di Z. Per fare ciò si basa sulla formalizzazione di Heyting del 1930, ma vi deve apportare qualche modifica. Infatti, lui stesso fa notare come H' non sia realmente un sottosistema di quello di Heyting, poiché occorre innanzitutto 188 aggiungere ai suoi assiomi le formule del gruppo D e quelle che definiscono le funzioni del gruppo. Queste vi compaiono tutte in quanto è legittima la loro definizione attraverso recursione anche nella matematica intuizionista.[65]

Infine, poiché nel sistema di Heyting non ci sono variabili numeriche ma solo variabili x, y, z per oggetti qualsiasi, è conveniente evitare possibili complicazioni

[63] Ivi, p. 160.

[64] È questo il senso che al termine “finitistico” [Nota di AS. O finitario] era stato attribuito da Hilbert e Herbrand. Nel 1931 lo stesso Herbrand usava “intuizionista” al posto di finitistico non rilevando ancora una differenza apprezzabile tra i due termini. Sia Bernays sia Troelstra hanno sottolineato come sia proprio l’articolo in oggetto di Gödel a mostrare per primo che non è legittima la confusione dei due termini.

[65] Per Gödel la legittimità della definizione per recursione in matematica intuizionista era stata stabilita dallo stesso Heyting attraverso i seguenti assiomi per il successore:

10.03 $\vdash .p \in N \supset p + 1 =_{\mathrm{D}} seq'p.$

10.04 $\vdash .p, q \in N \supset p + seq'q =_{\mathrm{D}} seq'(p + q).$

Le premesse $p \in N$; $p, q \in N$ non sono più necessarie in H' poiché sono state introdotte apposite variabili per numeri naturali.

introducendo. in modo giustificabile da un punto di vista intuizionista variabili x', y', z' per numeri naturali.

È possibile adesso stabilire una traduzione che associ a ogni Z-formula A una formula corrispondente di H' nel modo seguente:

"Le variabili x, y, ... vanno tradotte con x', y', ...; ogni f_i va tradotta con la f_i di H' indicata con ugual simbolo; = con = ; 0 con 1; +1 con *seq'* ; le operazioni del calcolo [189] proposizionale vanno tradotte nel modo indicato sopra. $(x)A$ va tradotto con $(x')A'$, dove A' è la traduzione di A. Una formula che è la traduzione di una Z-formula si chiamerà Z-formula".[66]

Troelstra ha notato recentemente come in questo modo sfugga allo stesso Gödel una possibile fonte di confusione. Facendo iniziare i naturali in H' con 1 anziché con 0 si può avere, per esempio, una difficoltà nella traduzione dell'addizione. Ammettendo, infatti, che nel gruppo C questa sia stata così specificata : $x'+ 0 = x$; $x + Sy = S(x + y)$, il primo assioma sarebbe allora tradotto in H' con $x'+ 1 = x$, cosa che è evidentemente falsa.[67] Per ovviare a questo, secondo Troelstra è probabilmente sufficiente lasciare partire i numeri naturali da 0 anche in H'.

È possibile adesso per Gödel enunciare un teorema che rappresenta un sorprendente risultato:

TEOREMA 1. *Se la formula A è dimostrabile nel sistema di* [190] *Herbrand, allora la sua traduzione A è dimostrabile in H'.*

Infatti, come corollario di questo teorema abbiamo che, se formuliamo Z attraverso i soli $\wedge$, $\neg$, (x), usati come simboli primitivi, allora Z è un sottosistema di H'. "Il teorema 1, appena dimostrato, mostra che l'aritmetica e la teoria dei numeri intuizioniste sono solo in apparenza più ristrette di quelle classiche: in realtà invece le contengono per intero solo in un'interpretazione un po' deviante".
In questo modo abbiamo una dimostrazione di non contraddittorietà di A, che tra l'altro non comporta particolari difficoltà tecniche, relativamente all'aritmetica intuizionista. Ciò è piuttosto rilevante se pensiamo soprattutto che l'insistenza di Brouwer sulla contraddittorietà dell'analisi classica era stata uno dei principali motivi di diffidenza nei confronti dell'intuizionismo. Bernays prima e più tardi Troelstra hanno sottolineato come in questo modo Gödel aveva fatto emergere l'impossibilità di considerare sinonimi intuizionismo e finitismo. "Secondo Bernays (1967) l'articolo di Göde1 [191] mostrò ai membri della scuola di Hilbert che c'erano alternative al ragionamento finitista come base per la metamatematica e anche che i principi intuizionisti andavano aldilà del finitismo".[68]

In questo modo grazie a Gödel veniva inoltre a decadere l'idea che il rifiuto del "principio del terzo escluso" portasse alla teoria intuizionista un carattere limitativo nei confronti della teoria classica. Gödel precisa non solo come non sia possibile parlare di limitazione da parte dell'intuizionismo fino a che ci manteniamo a livello dell'aritmetica, ma che in ogni caso anche a un livello superiore non sia il rifiuto di questo principio la causa di una supposta limitazione. "Soltanto a livello di analisi e di teoria degli insiemi l'intuizionismo sembra comportare delle vere e proprie

[66] Ivi, p. 162.
[67] Per indicare il successore Troelstra usa il simbolo *S*, Herbrand +l e Heyting *seq*.
[68] A.S. Troelstra, "Introductory note to 1933e", in *Kurt Gödel Collected Works*, cit., p. 284, trad. p. 209.

limitazioni, le quali per altro non derivano dal rifiuto del *tertium non datur* ma da quello delle costruzioni impredicative dei concetti".[69]

La traduzione proposta da Gödel e le varianti che di questa furono proposte successivamente, restano conosciute come [192] "traduzione negativa".[70] In questa direzione abbiamo visto che il lavoro di Gödel era stato notevolmente anticipato dalla proposta di Kolmogorov ce, 1925 di una traduzione che avvenisse attraverso l'introduzione simultanea della doppia negazione di fronte ad ogni formula presa in modo che vi apparisse solo il simbolo dell'implicazione e della negazione. Gödel comunque non conosceva ancora nel 1932 il lavoro di Kolmogorov. Un altro tentativo che aveva portato ad, un risultato analogo era stato fatto nel 1933 da Gentzen e Bernays, i quali usavano una traduzione più elegante che manteneva il simbolo per l'implicazione. Tale contributo non venne mai pubblicato per volontà dello stesso Gentzen, una volta venuto a conoscenza del lavoro di Gödel.

Nell'economia di questo capitolo è soprattutto interessante fermare l'attenzione su alcuni aspetti di un'interpretazione che nel 1933 Gödel tentò di dare al calcolo proposizionale dell'olandese e che segue, a nostro avviso, alcune delle più importanti indicazioni emerse nel dibattito tra Heyting e Freudenthal di questi anni. [193]

La proposta di Gödel consiste nell'interpretare il calcolo proposizionale intuizionista H attraverso i concetti usuali della logica proposizionale classica, arricchendoli con un operatore unario B (*beweisbar*, dimostrabile). Intendendo così Bp come "p è dimostrabile" si assumono per $\rightarrow$, $\sim$, . e $\vee$ gli assiomi e le regole del calcolo proposizionale classico e per B il sistema di assiomi S:

1. $Bp \rightarrow p$
2. $Bp \rightarrow (B(p \rightarrow q) \rightarrow Bq)$
3. $Bp \rightarrow Bbp$

e si aggiunge la seguente regola di inferenza [di "necessitazione"]: "dalla [dimostrazione di] A si può concludere [che] BA [è dimostrabile]".

I concetti primitivi del calcolo di Heyting vengono interpretati mediante la seguente traduzione

$\neg p \Rightarrow \sim Bp$ (oppure $B\sim Bp$)
$p \supset q \Rightarrow Bp \rightarrow Bq$
$p \vee q \Rightarrow Bp \vee Bq$
$p \wedge q \Rightarrow p \,.\, q$ [oppure $Bp \,.\, Bp$]

Tutte le formule di H così tradotte sono derivabili da S; non lo è invece, naturalmente, la formula che rappresenta [194] il "principio del terzo escluso", anche perché in generale S rispetta la "primalità" di H. Non può seguire cioè da S nessuna formula della forma $BP \vee BQ$, se già prima non è dimostrabile, a partire da S, BP oppure BQ.

Gödel avverte di non considerare l'operatore B come rappresentante il concetto "dimostrabile in un determinato sistema formale S". Occorre piuttosto intenderlo invece semplicemente come "dimostrabile in un qualsiasi modo corretto". Nel primo

[69] K. Gödel, *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentherie*, cit. p. 164.

[70] Riguardo alla questione della "traduzione negativa" [come importante strumento di lavoro in teoria della dimostrazione] andrebbero prese in esame alcune complicazioni ulteriori che, tuttavia, ci allontanerebbero troppo dal taglio interpretativo dato a questo lavoro.

caso si entrerebbe, infatti, in contrasto con il secondo teorema di incompletezza”, che asserisce l'impossibilità di dimostrare nella teoria dei numeri la formula che afferma la sua stessa non contraddittorietà, oppure dovremmo considerare non valida, per esempio, la formula $B(Bp\ p)$ in qualsiasi sistema S contenente l'aritmetica. “Infatti, in caso contrario sarebbe dimostrabile in S, per esempio, $B(0 \neq 0) \rightarrow 0 \neq 0$ e perciò anche $\sim B(0 \neq 0)$, cioè la consistenza di S sarebbe dimostrabile in S”.[71]
L'interpretazione che così emerge è straordinariamente simile a quelle suggerite da Heyting nelle lettere [195] indirizzate a Freudentha1, soprattutto a quella proposta che prevedeva l'introduzione dell'operatore + , nonostante quella di Gödel poggi sul calcolo proposizionale classico.

In generale pensiamo che Gödel non doveva conoscere direttamente questa interpretazione, ma piuttosto la formulazione del 1931,[72] nella quale comunque Heyting suggeriva analogamente di mantenere la distinzione tra l'affermazione di una proposizione e la sua dimostrabilità e di identificare il concetto di “intuizionisticamente vero” con quello di “dimostrabile intuizionisticamente”. Gödel si attiene sicuramente anche a questo suggerimento, tuttavia il risultato a cui giunge va ben oltre quello che lasciava intravedere l'interpretazione di Heyting.

Troelstra[73] sottolinea come a Gödel interessi in modo particolare che la sua interpretazione sia sensata anche da un punto di vista non intuizionista. In questo senso Troelstra legge anche il riferimento che Gödel fa a fondo pagina [dell’articolo citato] nei confronti dell'interpretazione di Kolmogorov del 1932.[74] [196]

Uno dei risultati più importanti a cui porta questo breve articolo, soprattutto per le conseguenze e gli sviluppi ulteriori, fu dato dal fatto di avere modellato gli assiomi forniti per B su quelli della logica proposizionale modale di Lewis S4 in modo che Gödel potesse asserire: “Il sistema S è equivalente al sistema dell’implicazione stretta di Lewis quando Bp venga tradotto con Np e il sistema di Lewis venga esteso mediante il seguente assioma aggiuntivo di Becker[75] $Np < Nnp$”.[76] La dimostrazione di ciò fu data in seguito da Mc Kinsey e Tarski nel 1948 attraverso l’uso di una semantica algebrica.[77]

Questo risultato ebbe notevoli conseguenze soprattutto in vista del lavoro di S. Kripke sulla semantica per la logica intuizionista. Fu infatti a partire dalla semantica data per la logica modale che fu possibile a Kripke intravedere attraverso quali

---

[71] K. Gödel, “Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls”, in *Ergebnisse* eines matehematischen Kolloquium, IV, 1931-32, pp. 39-40, trad. C. Bertini, *Dalla logica alla metalogica*, cit. pp. 156-157.
[72] A. Heyting, *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik*, in “Erkenntnis”, II, 1931, pp. 113-114.
[73] A.S. Troelstra, “Introductory note to 1933f”, in *Kurt Gödel Collected Works*, vol. I, cit., p. 299, trad. p. 218.
[74] Ci riferiamo alla seguente nota: “Un’‘interpretazione un po’‘ diversa del calcolo proposizionale intuizionista è stata data da Kolmogorov (“Math. Zeitschr.”, 35, p. 58). che non ha però fornito un preciso formalismo”.
[75] O. Becker, *Zur Logik der Modalitäten*, in “Jahrb. f. Phil. u. phänomenol. Forsch.” XI, 1930, p. 497.
[76] K. Gödel, *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls*, cit., p. 157.
[77] J.C.C. McKinsey, A. Tarski, *Some Theorems about the sentential Calculi of Lewis and Heyting*, in, J. simb. Logic”, 13, 1948, pp. 1-15.

varianti avrebbe potuto ottenere analogamente una semantica per la logica intuizionista.[78] [197]

6. *Il calcolo minimale di I. Johansson*

Analizzando l'articolo di Kolmogorov del 1925 abbiamo sottolineato come il sistema da lui delineato corrispondesse non tanto a un sistema intuizionista, per come questo è stato inteso dopo la formalizzazione di Glivenko e Heyting, ma piuttosto a un sistema minimale.

Il calcolo minimale deve le sue origini alla riflessione del danese Ingebrigt Johansson che, a partire da alcune considerazioni sul sistema di Heyting, elabora un calcolo che poggia su un'ipotesi più ristretta della negazione. "Il nome calcolo minimale si giustifica proprio per questo fatto; una logica più stretta quasi non è pensabile se ci deve apparire una negazione e le proposizioni su $\rightarrow$, $\wedge$ e $\vee$ devono essere le stesse come in Heyting".[79]

Nel sistema di Heyting vi sono per Johansson due assiomi
che devono essere presi in attenta considerazione, poiché [198] fanno emergere come la relazione di consequenzialità abbia un senso diverso da quello che assume solitamente nel linguaggio comune. Questi sono:

2.14 $\vdash\!\!\vdash b \rightarrow (a \rightarrow b)$,
4.1 $\vdash\!\!\vdash \neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$.

Seguendo l'idea che dell'implicazione emerge da questi due assiomi, possiamo considerare $a \rightarrow b$ valida in ognuno dei seguenti tre casi

1. Se b è riconosciuto come conseguenza logica di a.
2. Se b è riconosciuto giusto.
3. Se a è riconosciuta falsa (assurda).

I primi due casi sono facilmente accettabili. Il calcolo minimale poggia, su una riserva sollevata a proposito del terzo caso, considerato come un ampliamento eccessivo del concetto di conseguenza logica e che si tenta perciò di evitare.

La difesa di Glivenko di questi due assiomi si avvaleva del fatto che era possibile considerarli entrambi derivanti da una formula la cui accettazione è per lui evidente, ovvero "la legge di Filone Megarico": [199]

$\vdash (\neg a \vee b) \rightarrow (a \rightarrow b)$.

Glivenko tuttavia rifiuta la formula inversa

$\vdash (a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \vee b)$

in quanto, fra l'altro, porta facilmente a una dimostrazione del "principio del terzo escluso", qualora a b vi si sostituisca a. Essa è invece accettata da qualsiasi sistema

---

[78] S.A. Kripke, "Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I", in *Formal System and recursive Functions*, Nothh Holland, Amsterdam 1965, pp. 94-102.
[79] I. Johansson, *Der Minimalkalkül, ein reduzierter Formalismus*, in "Compositio Math." 4, 1936, pp. 119-136.

che si ponga da un punto di vista affine alla logica classica, compreso il calcolo dell'"implicazione stretta" di Lewis, per il quale però è l'unico verso accettabile. Nel calcolo minimale entrambe queste formule vengono rifiutate.

Ciò traccia solo a grandi linee la differenza tra questi calcoli, la quale non è poi così semplice. Un'ulteriore complicazione secondo Johansson può infatti derivare dal simbolo di negazione, che nel calcolo minimale viene inteso come "impossibile" piuttosto che come il "falso" dell'implicazione stretta di Lewis. Tuttavia, la differenza della formalizzazione dell'intuizionismo di Heyting si può evidenziare tramite gli assiomi assunti per la negazione. Dei due validi nel sistema intuizionista Johansson ne [200] conserva per il suo calcolo minimale solo uno ovvero rifiuta 4.1 e mantiene invece

4. 11 $\vdash\vdash (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg a$.

In questo modo possibile per il danese fare alcune importanti considerazioni intorno alla possibilità di sostituire $\neg a$ con $a \rightarrow \lambda$ (dove λ significa "contraddizione" o "qualche falsità"). Abbiamo cioè

$\neg a =_{D} a \rightarrow \lambda$.

Vedremo come il calcolo minimale si ottenga proprio non facendo nessuna premessa su λ. Il rifiuto dell'assioma 4.1 porta di conseguenza a una riformulazione di parte della sezione riservata agli assiomi per la negazione. Le formule che vanno rigettate sono tuttavia un numero estremamente limitato. Dal paragone con il calcolo di Heyting emerge che oltre all'assioma summenzionato si rifiutano nel calcolo minimale altre otto formule. Occorre dunque considerare con particolare attenzione le seguenti;

4.1 $\vdash\vdash \neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$,
4.4 $\vdash\vdash a \wedge \neg a \rightarrow b$, [201]
4.41 $\vdash (a \wedge \neg a) \vee b \rightarrow b$,
4.42 $\vdash (a \vee b) \wedge \neg a \rightarrow b$,
4.45 $\vdash b \vee \neg b \rightarrow (\neg\neg b \rightarrow b)$,
4.46 $\vdash \neg a \vee b \rightarrow (a \rightarrow b)$,
4.47 $\vdash a \vee b \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$
4.71 $\vdash (a \rightarrow b \vee \neg c) \rightarrow (a \wedge c \rightarrow b)$,
4.81 $\vdash \neg\neg(\neg\neg a \rightarrow a)$.

L'assenza di queste proposizioni, indimostrabili nel calcolo minimale, è in gran parte compensata da alcune riformulazioni. Occorrono però alcune riflessioni supplementari. Innanzitutto possiamo notare come il rifiuto di 4.1 e 4.4,che dal punto di vista minim1e è indispensabile, porta come conseguenza il decadere di 4.41 che Johansson non è immediatamente disposto ad abbandonare. Nel calcolo del danese il posto di 4.41 è infatti preso da due formule le quali mantengono validità al caso in cui *b* sia negativo mentre per *b* positivo indeboliscono la formula sostituendo a *b* nell'ultimo posto $\neg\neg b$. Queste sono infatti: [202]

4.41* $\vdash (a \wedge \neg a) \vee b \rightarrow \neg\neg b$.
4.41** $\vdash (a \wedge \neg a) \vee \neg b \rightarrow \neg b$.

Ora per Johansson è importante che nel sistema minimale si mantenga la "primalità" goduta dal calcolo intuizionista. Se dunque "una disgiunzione $A \vee B$ può essere logicamente valida solo se almeno una delle formule A e B è logicamente valida",[80] allora possiamo difendere 4.41. considerando che, se dimostro $\vdash (a \wedge \neg\, a) \vee b$, allora o dimostro $\vdash (a \wedge \neg\, a)$ o dimostro $\vdash b$. Poiché non è possibile dimostrare nel sistema una formula che rappresenta una contraddizione di conseguenza deve essere dimostrabile $\vdash b$. Tuttavia, non è possibile aggiungere tra gli assiomi anche 4.41 perché questo ci porterebbe facilmente nel sistema 4.1 e 4.4 come formule dimostrabili.

Una via di uscita a questa difficoltà è rappresentata dallo "schema conclusivo" seguente

$$(1)\quad \begin{array}{l} \underline{\text{Se} \vdash b \vee (a \wedge \neg\, a)} \\ \text{allora} \vdash b. \end{array}$$

Johansson sottolinea come vi sia una sostanziale diversità tra il simbolo dell'implicazione e la linea che appare [203] nello schema (1). Considera a questo proposito la relazione tra le tre seguenti formule:

$$B \rightarrow C,\ (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C),\ (A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow C$$

e gli schemi corrispondenti

$$\begin{array}{l} \underline{\vdash B,\ \vdash A \rightarrow B,\ \vdash (A \rightarrow B) \wedge A} \\ \vdash C,\ \vdash A \rightarrow C,\ \vdash C \end{array}$$

Se è valida la prima di queste formule, ne consegue la validità delle altre due tramite

2.291 $\vdash : b \rightarrow c. : a \rightarrow b. \rightarrow .a\, c.$ e
2.27 $\vdash : a \rightarrow .b \rightarrow c : \rightarrow . a \wedge b \rightarrow c.$

del calcolo di Heyting e che sono mantenute in quello minimale. Per quanto riguarda gli schemi invece solo il terzo è una conseguenza della validità del primo, mentre il secondo è in generale molto più forte. Per Johansson non è accettabile infatti lo schema

$$(2)\quad \begin{array}{l} \underline{\vdash A \rightarrow (a \wedge \neg a) \vee b} \\ \vdash A \rightarrow b \end{array}$$

dove A è interpretato come sistema di assiomi di una teoria qualsiasi, cioè come congiunzione di assiomi [204] singoli. Infatti

$$(3)\ \vdash A \rightarrow (a \wedge \neg\, a) \vee b$$

afferma che $(a \wedge \neg a) \vee b$ è valida nella teoria di cui è sistema di assiomi; ma ciò non permette di passare con facilità alla validità di $\vdash A \rightarrow b$ nella stessa teoria in quanto

[80] Ivi, p. 126.

(3) può significare anche che A è contraddittorio ovvero, per Johansson, tale che permetta la dimostrazione di una formula della forma $a \wedge \neg a$ cioè $\vdash A \to a \wedge \neg a$. Quindi $\vdash A \to b$ è ottenibile solo se riconosciamo come valida 4.4.

A questo punto è possibile per il danese introdurre una serie di schemi conclusivi che sostituiscano rispettivamente 4.42 (e 4.47), 4.45, 4.46 e 4.71. Cioè

(4) $\dfrac{\vdash (a \vee b) \wedge \neg a}{\vdash b}$

(5) $\dfrac{\vdash (b \vee \neg b) \wedge \neg\neg b}{\vdash b}$

(6) $\dfrac{\vdash (\neg a \vee b) \wedge a}{\vdash b}$

(7) $\dfrac{\vdash (a \to b \vee \neg c) \wedge a \wedge c}{\vdash b}$ [205]

Questi schemi non fanno propriamente parte del calcolo minimale, ma ne descrivono certe caratteristiche. Nel caso summenzionato (1) ciò che si afferma è che "se conosciamo una catena di dimostrazione per una proposizione del tipo $\vdash b \vee (a \wedge \neg a)$, la possiamo tra sformare in modo tale che si ottenga una catena di dimostrazione per la proposizione $\vdash b$".[81] Lo scopo degli schemi è, infatti, quello di mostrare come il calcolo minimale non rappresenti un indebolimento al fine di una supposta formalizzazione per una disciplina qualsiasi.

"Tutto ciò che è dimostrabile con gli schemi (1) e (4) – (7), lo è anche senza questi. La validità di questi schemi però fa capire meglio la supposizione che il calcolo minimale sarà efficiente come quello intuizionista, se lo vogliamo usare per la formalizzazione di una disciplina".[82]

Un'ulteriore differenza rispetto al sistema intuizionista di Heyting è data dal rapporto che lega nel calcolo minimale il "principio del terzo escluso" al "principio di [206] reciprocità della specie complementare". Infatti mentre, in *H* le due formule

8) $a \vee \neg a$

e

(9) $\neg\neg a \to a$

sono intercambiabili, nel senso che se se ne assume una come assioma l'altra è una proposizione dimostrabile nel sistema,[83] nel calcolo minimale occorre fare un'ulteriore
considerazione. Assumendo (9) come assioma diventa immediatamente dimostrabile (8). Si prenda, infatti, (9) nella forma $\neg\neg(a \vee \neg a) \to a \vee \neg a$, [sostituendo $a \vee \neg a$ ad a] ; dalla 4.8 otteniamo $a \vee \neg a$. L'assunzione della sola (8),viceversa, non basta per dimostrare nel sistema "il principio di reciprocità della specie complementare"; è necessario infatti che si assuma anche 4.4. In questo modo il sistema diventa nuovamente equivalente al calcolo di Heyting e perciò (9) si dimostra a partire da (8) tramite 4.45. È interessante notare, come fa Johansson, che assumendo [207] (9), ma non

[81] Ivi, p. 128.
[82] *Ibidem.*
[83] [Nota di AS. $(\neg\neg a \to a) \to (a \vee \neg a)$ è una tesi classica non intuizionista.]

4.4, coma assioma avremmo un calcolo notevolmente simile, anche se non coincidente, a quello dell'implicazione stretta di Lewis. Infine perdono valore, nel calcolo minimale, le proposizioni di Glivenko in conseguenza al decadere di 4.81.

Abbiamo già accennato in precedenza alla possibilità di sostituire $\neg a$ con $a \rightarrow \lambda$ dove λ è una proposizione che in generale indica "contraddizione". Nel calcolo minimale vale

10) $\vdash \neg a \wedge \neg\neg a \rightarrow \neg b \wedge \neg\neg b.$

ciò significa che l'espressione $\neg a \wedge \neg\neg a$ è indipendente da ciò che assumiamo come variabile proposizionale, cioè da a. Johansson propone allora di caratterizzare questa espressione brevemente con λ senza dare nessun tipo di specificazione ulteriore su a. Abbiamo:

(11) $\vdash \lambda =_D \neg a \wedge \neg\neg a.$

Nel calcolo intuizionista λ potrebbe essere analogamente rappresentato dall'espressione $a \wedge \neg a$. Nel calcolo di Johansson abbiamo dunque la possibilità di dimostrare alcuni teoremi su λ: [208]

(12) $\vdash \neg a \wedge \neg\neg a$

(13) $\vdash a \wedge \lambda \leftrightarrow a \wedge \neg a$

(14) $\vdash \neg a \leftrightarrow a \rightarrow \lambda.$

È inoltre possibile definire i partendo da nel modo segente:

(15) $\vdash \neg a =_D a \rightarrow \lambda$

Se adesso prendiamo in considerazione l'unico assioma per la negazione del calcolo minimale 4.11, risulta facilmente che non abbiamo bisogno di sostituirlo. Ciò significa che nel calcolo di Johansson λ può considerarsi come una variabile proposizionale e non abbiamo bisogno di fare nessuna ulteriore supposizione su di essa. Secondo la definizione (15), 4.11 prende infatti questa forma :

(15) $\vdash (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow (b \rightarrow \lambda)) \rightarrow (a \rightarrow \lambda)$

che è dimostrabile nel calcolo minimale partendo dagli assiomi su $\wedge$ e λ. In questo modo Johansson può enunciare un risultato particolarmente importante per il calcolo minimale. "Generalmente vale: *una formula qualsiasi costruita da* $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ *e variabili proposizionali vale nel* [209] *calcolo minimale soltanto se la formula che proviene da questa tramite l'introduzione di* λ *al posto di* $\neg$ *secondo* (15) *è deducibile mediante assiomi dove non appare la negazione* (*cioè a esclusione di* 4.11)".[84]

Per ottenere il calcolo intuizionista occorre invece un'ulteriore considerazione. È, infatti, necessario assumere come assioma

[84] *Ibidem.*

(16) $\vdash \vdash \lambda \rightarrow b$,

cioè la possibilità di derivare da una contraddizione una formula qualsiasi b. Questa è una ipotesi su λ, non necessaria al calcolo minimale, generalmente nota come "ipotesi scotiana" in quanto legata alla "legge di Duns Scoto". La dimostrazione del teorema enunciato precedentemente è illustrata dallo stesso Johansson e non comporta problemi particolari. Come corollario otteniamo che è possibile dedurre una formula qualsiasi dove non appaia la negazione, a partire dai soli assiomi che si riferiscono agli altri connettivi.

Particolarmente interessante ci sembra l'affinità riscontrata [210] da Johansson tra l'interpretazione della negazione da lui data attraverso λ e quella di Kolmogorov in termini di calcolo dei problemi. Per il sovietico $\neg a$, infatti, caratterizza il problema "supposto che la soluzione di sia data, ottenere una contraddizione , e questo è proprio quel che asserisce la definizione di $\neg a$ come a $\rightarrow\lambda$ a, se interpretiamo λ come il problema "ottenere una contraddizione".

La differenza rilevante che Johansson riscontra tra la sua interpretazione e quella di Kolmogorov è data allora dal semplice fatto che per il sovietico vale in più questa premessa implicita

$\vdash \lambda \rightarrow b$,

cioè che possiamo considerare risolto il problema "supposto che sia stata ottenuta una contraddizione risolvere un problema qualsiasi". Questa premessa su λ è proprio quella che caratterizza per Johansson il calcolo intuizionista. Ciò conferma ancora una volta la particolare adeguatezza dell'interpretazione data dal sovietico nei confronti della [211] formalizzazione di Heyting. Inoltre nota Johansson che, "se lasciamo perdere questa premessa e interpretiamo in modo più forte il segno $\rightarrow$, allora otteniamo un'interpretazione come "teoria di problemi" per il calcolo minimale".[85]

7. *Topologia e calcolo proposizionale intuizionista*

Nel 1937 Alfred Tarski interviene al Terzo Congresso Matematico di Varsavia con una relazione tesa a mettere in risalto alcune connessioni formali tra la topologia e il calcolo proposizionale. L'intervento, pubblicato l'anno seguente in *Fundamenta Mathematicae*, dedica un'ampia parte all'analisi del caso intuizionista, riuscendo anche a evidenziare alcuni significativi rapporti, fondamentali da un punto di vista non solamente formale, sussistenti tra il calcolo proposizionale classico e quello intuizionista. È particolarmente interessante come fin dall'inizio Tarski non mostri, dichiaratamente, alcuna preoccupazione [212] di accordare i metodi del ragionamento da lui usati con le richieste della logica intuizionista. Ci interessa inoltre mettere in risalto come ormai il sistema intuizionista venga trattato come un oggetto matematico alla stessa stregua di quanto avviene con quello classico e, tuttavia, se ne rispetti, da un punto di vista logico, quello che è il nucleo essenziale. Manca, infatti, qualsiasi preoccupazione di attenersi a posizioni rigidamente fedeli al pensiero di Brouwer, che d'altro canto lo stesso Tarski non avrebbe potuto condividere, ma a un tempo si

---

[85] Ivi, p. 130.

traccia una serie di risultati determinanti, che evidenziano, se traguardati da un certo punto di vista, la legittimità della operazione.

L'autore definisce innanzitutto i due sistemi. A questo proposito introduce un solo tipo di variabili, quello per proposizioni e quattro costanti logiche ovvero i simboli per i connettivi: $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\sim$. Attraverso la combinazione di queste costanti con le variabili proposizionali ed eventuali parentesi si [213] ottengono come al solito *espressioni arbitrarie* che vengono indicate con le lettere A, B, C, *espressioni composte sono l'implicazione* $A \rightarrow B$, la congiunzione $A \wedge B$, *la disgiunzione* $A \vee B$ *e la negazione* A.

In questo articolo i segni relativi ai connettivi sono usati da Tarski sia in senso logico che in senso metalogico, sia in un terzo senso ancora nella parte che si riferisce esplicitamente alla topologia. Il passo successivo è di definire normalmente il sistema di tutte le proposizioni come segue:

Definizione 1. Un'espressione A è detta *funzione proposizionale* o (in breve) *proposizione* se A appartiene a ogni sistema che

(i) contiene tutte le variabili proposizionali tra i suoi elementi

(ii) è chiuso sotto le operazioni di formazione di implicazioni, disgiunzioni, congiunzioni e negazioni; in altre parole il sistema di tutte le proposizioni è il più piccolo sistema che le proprietà (i) e (ii). [214]

Partendo da questo sistema è possibile individuare due sottosistemi $\mathcal{ZK}$ o sistema delle proposizioni dimostrabili nel calcolo bivalente (ovvero classico) e $\mathcal{JK}$ o sistema delle proposizioni dimostrabili nel calcolo intuizionista. A questo scopo vengono definiti gli assiomi e le regole di inferenza dei rispettivi calcoli. Questi sono ripresi per quanto riguarda il calcolo classico, da Hilbert e Bernays, mentre per il calcolo intuizionista non viene adottato il sistema di Heyting, ma si assumono gli assiomi dati da G. Gentzen nel 1934.[86]

Gli assiomi del calcolo classico sono

(i) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
(ii) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
(iii) $A \rightarrow (A \vee B)$
(iv) $B \rightarrow (A \vee B)$
(v) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
(vi) $(A \wedge B) \rightarrow A$
(vii) $(A \wedge B) \rightarrow B$ [215]
(viii) $(C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow (A \wedge B)))$
(ix) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
(x) $(\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$

Il calcolo intuizionista si ottiene invece sostituendo l'assioma (x) con

(xi) $(A \rightarrow \sim A) \rightarrow A$

---

[86] G. Gentzen aveva fornito questi assiomi nel suo articolo *Untersuchungen über das logische Schliessen*, articolo di estrema importanza dove tra l'altro veniva dato un procedimento di decisione per la logica intuizionista e una dimostrazione formale della primalità. Questo articolo non viene però analizzato nel corso della nostra trattazione.

L'unica regola di inferenza definita è quella di separazione in quanto il sistema di assiomi dato è già chiuso nei confronti dell'operazione di sostituzione.

$\mathcal{JK}$ e $\mathcal{ZK}$ vengono adesso caratterizzati come i più piccoli sistemi che contengono rispettivamente gli assiomi del calcolo intuizionista e di quello bivalente e che sono chiusi sotto l'operazione di separazione.

Tenendo conto dei lavori di Glivenko e di Heyting è possibile per Tarski enunciare subito due teoremi che considerano alcuni immediati rapporti tra i due sistemi appena definiti.

TEOREMA 1. $\mathcal{JK} \subseteq \mathcal{ZK}$ (ma non viceversa; se, per esempio, B è una variabile proposizionale, allora [216] $B \vee \sim B$ e $\sim B \vee \sim\sim B$ appartengono a $\mathcal{ZK}$ ma non a $\mathcal{JK}$).

La prima parte si ottiene facilmente dalle definizioni precedenti mostrando che ogni proposizione della forma $A = (B \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim B$ appartiene a $\mathcal{ZK}$. Una dimostrazione della seconda parte è stata data, come abbiamo visto in precedenza, dallo stesso Heyting in conclusione del suo articolo del '30.

Il teorema successivo è dovuto invece a Glivenko:

TEOREMA 2. Per ogni proposizione A le condizioni seguenti sono equivalenti

(i) $A \in \mathcal{ZK}$,

(ii) $\sim A \in \mathcal{ZK}$,

(iii) $\sim\sim A \in \mathcal{ZK}$.

Questo teorema viene usato spesso da Tarski per la dimostrazione di teoremi successivi.

Il problema che adesso si pone è se e come sia possibile dare un criterio di decisione per il sistema classico e per quello intuizionista, un criterio cioè che per ogni proposizione data A stabilisca se è una formula dimostrabile di quel calcolo. A questo scopo Tarski si rivolge al metodo delle [217] matrici.

Si chiama *matrice normale logica* una sestupla ordinata

$$M = [W, a, \twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim]$$

dove W è un insieme di elementi arbitrari che interpretiamo come sistema di valori, a è l'elemento designato, , $\twoheadrightarrow$, $\curlyvee$, $\curlywedge$ sono tre operazioni binarie e $\sim$ un'operazione unaria su W.

Inoltre si richiede che valga:

se $Y \in W$ e $a \twoheadrightarrow Y = a$, allora $Y = a$,

cioè, se l'implicazione va sull'elemento designato, e l'antecedente è proprio questo elemento, allora ci va sicuramente anche il conseguente. In questo modo ci assicuriamo che valga il *modus ponens*.

Data una matrice M, Tarski definisce, per ogni formula A, una funzione F_{AM}, di valutazione che associa un valore di verità (un elemento di W) a ogni successione infinita $X_1, X_2 \ldots X_n \ldots$ di elementi di W. La definizione, per induzione sulla costruzione di A, è la seguente: [218]

Definizione 1.

(i) $F_{AM}(X_1, \ldots X_n \ldots) = X_p$ se $A = V_p$ $(p = 1,2, \ldots)$,

(ii) $F_{AM}(X_1, \ldots X_n \ldots) = F_{BM}(X_1, \ldots X_n \ldots) \twoheadrightarrow F_{CM}(X_1, \ldots X_n \ldots)$ se $A = B \rightarrow C$ (dove B e C sono proposizioni qualsiasi)

(iii), (iv) in modo analogo per le operazioni ϒ e ∨ o ⅄ e ∧

(v) $F_{AM}(X_1, \ldots X_n \ldots) = {\sim}F_{BM}(X_1, \ldots X_n \ldots)$ se $A = {\sim}B$ (dove B è una proposizione qualsiasi).

Una formula è *soddisfatta* o *vale* in una matrice M se la funzione F a essa associata assume il valore designato per ogni successione infinita di elementi di W. "Diciamo che la proposizione A è soddisfatta dalla matrice M, in simboli $A \in C(M)$[87] se F_{AM} $(X_1, \ldots X_n \ldots) = a$ per tutti gli $X_1 \ldots X_n$ di W".[88] La matrice M è detta *adeguata* per un qualsiasi sistema S di proposizioni se $C(M) = S$, cioè se il sistema coincide con l'insieme di tutte le proposizioni soddisfatte in M. Diventa allora particolarmente interessante trovare due matrici che siano *adeguate* rispettivamente ai [219] sistemi $\mathcal{ZK}$ e $\mathcal{JK}$, come precisati precedentemente da Tarski, poiché in questo modo avremmo fatto anche un primo passo in direzione di un criterio di decisione per i due sistemi.

Per quanto riguarda il sistema bivalente $\mathcal{ZK}$ non vi sono particolari problemi, poiché in pratica si assume una matrice in cui W sia costituito da due elementi 0, 1, di cui 1 è l'elemento designato e si definiscono opportunamente le operazioni della matrice in modo che prenda il valore 0 solo quando x prende 1 e y prende 0, la disgiunzione prende il massimo, la congiunzione il minimo e la negazione prende come valore 1 per l'argomento 0 e 0 per l'argomento 1.

Definizione 2. Denotiamo con $\mathcal{ZK}$ la sestupla ordinata $[W, 1, \twoheadrightarrow, ϒ, ⅄, \sim]$ dove $W = \{0, 1\}$, $x \twoheadrightarrow y = 1 - x \cup x \cap y$, $x \,ϒ\, y = x \cup y - x \cap y$, $x \,⅄\, y = x \cap y$ e ${\sim}x = 1 - x$ per tutti gli $x, y \in W$.

Avendola così definita, $\mathcal{ZK}$ è l'algebra di Boole a due valori. Non comporta allora problemi particolari la dimostrazione [220] del teorema seguente che dipende dalla completezza del sistema $\mathcal{ZK}$.

Teorema 3. ZK è una matrice e $C(ZK) = \mathcal{ZK}$.

Più problematico è il caso per il sistema $\mathcal{JK}$. Gödel ha dimostrato, infatti, come abbiamo visto in precedenza, l'impossibilità di trovare una matrice adeguata con un sistema di valori finito per il caso intuizionista. Tuttavia ciò può non costituire un ostacolo insormontabile.

Tarski usa a questo scopo un risultato particolarmente importante stabilito da Jaskowski nel 1935 e comunicato al Congresso Internazionale di Filosofia della Scienza a Parigi l'anno seguente. L'idea di Jaskowski fondamentalmente è quella di costruire induttivamente una sequenza infinita numerabile di matrici $IK_1, \ldots IK_n \ldots$

---

87 [Nota di A. Sciacchitano. La notazione originale di Tarski è in gotico: $A \in E(M)$, dove forse E sta per epistemico. Inoltre il simbolo E è omogeneo alla nozione di E-spazio topologico]

88 A. Tarski, *Der Aussagenkalkül und die Topologie,* in "Fundamenta Mathematicae", vol, 31, 1938, pp. 103-134, trad. inglese in A. Tarski, *Logic, Semantics and Metamathematics*, Oxford University Pres, Oxford 1956, pp. 421-454.

con sistemi di valori finiti, in modo tale che $\mathcal{JK}$ coincida con l'intersezione di tutti gli insiemi di proposizioni soddisfatte da ogni singola matrice IK_n ovvero in modo tale che la formula A è intuizionisticamente dimostrabile se [221] e solo se è valida in tutte queste matrici

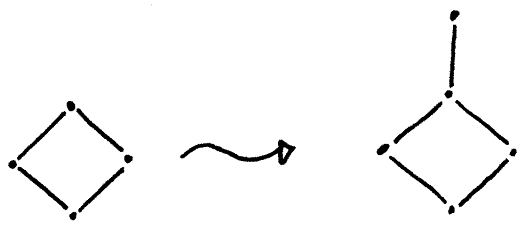
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C(IK) = \mathcal{JK}.$$ [89]

Punto di partenza della sequenza è costituito dall'algebra di Boole a due valori

$$IK_1 = ZK$$

Il passaggio da IK_n a IK_{n+1} si effettua tramite due operatori: ^{n} e *. Il primo permette di avere l'n-esima potenza della struttura. Prendiamo cioè l'insieme di tutte le n-uple di elementi della matrice; la definizione delle operazioni si effettua per punti. La * è un'operazione che, invece, aggiunge un nuovo elemento che funge da nuovo elemento designato, in modo tale che le formule che sono soddisfatte nella matrice M^* sono valide anche in M, ma in generale non viceversa.

Nel caso particolare in cui la matrice sia un'algebra di Heyting l'operazione consiste semplicemente nell'aggiungere un nuovo punto sopra l'elemento massimo: [222]



Definizione 3. $IK_1 = ZK$, $IK_{n+1} = ((IK_n)^{\,n})^*$ per ogni numero naturale n.

Sulla base di queste definizioni Tarski può adesso dimostrare l'importante teorema preannunciato:

Teorema 4. Affinché $A \in \mathcal{JK}$ è necessario e sufficiente che $A \in C(IK_n)$ per ogni numero naturale n, in altre parole:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C(IK_n) = \mathcal{JK}.$$

Con ciò si stabilisce anche un criterio di decisione in quanto si può mostrare che esiste una procedura effettiva tale che, data una qualunque formula A, dà un numero n tale che A è dimostrabile intuizionisticamente se e solo se è valida in tutte le matrici

---

89

Tarski usa a questo proposito il simbolo $\prod_{n=1}^{\infty}$ per il *prodotto continuo*. Abbiamo inoltre usato $\cap$ al posto di • e $\cup$ al posto di +.

da IK_1 a IK_n ovvero se e solo se è valida in IK_n.[90] 223 Anche questo risultato è dovuto a Jaskowski.

Tarski si rivolge adesso alla topologia e introduce il concetto di *spazio topologico*. La definizione usuale è possibile attraverso gli assiomi di chiusura di Kuratowski. Dato un insieme S, non vuoto, *operatore di chiusura* $\overline{}$ è un operatore che assegna a ogni sottoinsieme A di S la sua chiusura $\overline{A} \subset S$ che soddisfa le seguenti proprietà:

(i) $\overline{\varnothing} = \varnothing$,

la chiusura dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto;

(ii) $A \subset \overline{A}$,

ogni insieme è incluso nella sua chiusura;

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

la chiusura dell'unione di due insiemi è l'unione delle rispettive chiusure;

(iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

la chiusura della chiusura è la chiusura stessa.

In questo articolo Tarski non considera però semplici spazi topologici, ma spazi con una proprietà aggiuntiva 224 ovvero:

$\{\overline{x}\} = \{x\}$, per ogni $x \in S$,

la chiusura del singoletto è uguale al singoletto stesso.[91]

Definizione 4. Se S è uno spazio topologico, un insieme X è detto *aperto* (in S), in simboli $X \in O(S)$, se $X = S - \overline{S - X}$.

Ciò equivale a dire che $X = X°$, dove $X°$, l'interno di X, è definito come segue:

$X° = -\overline{(-X)}$

Definizione 5. Un sottoinsieme X di uno spazio topologico S è detto *denso* (in S) se $\overline{X} = S$.

Definizione 6. Uno spazio topologico S è *isolato* se e solo se $\overline{X} = X$ per ogni $X \subset S$.[92] 225 Che uno spazio sia isolato significa sostanzialmente che tutti i suoi sottoinsiemi sono chiusi e quindi di conseguenza che sono anche tutti aperti. In questo modo la topologia è la *topologia discreta*.

---

[90] Un altro criterio di decisione era stato dato in precedenza da G. Gentzen. Questo criterio era inoltre più agevole di quello dovuto a Jaskowski.

[91] Si può stabilire che spazi topologici con questa proprietà aggiuntiva sono spazi che soddisfano l'assioma di separazione $T1$: per ogni $x, y \in X$: se $x \neq y$, allora esiste un aperto A tale che: $x \in A$ e $y \notin A$.

[92] Si può definire così la proprietà di spazio isolato purché lo spazio sia $T1$.

Definizione 7. Uno spazio topologico S è detto *normale* se, per qualsiasi due sottoinsiemi chiusi disgiunti X_1 e X_2 di S, cioè tali che $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, esistono due aperti disgiunti Y_1, $Y_2 \in O(S)$ tali che $X_1 \subseteq Y_1$ e $X_2 \subseteq Y_2$.

Definizione 8. Diciamo che lo spazio topologico S è a *base numerabile* se esiste una famiglia numerabile di insiemi non vuoti $X_1 ... X_n .... \subseteq O(S)$ tali che ogni insieme non vuoto $Y \in O(S)$ può essere rappresentato nella forma $Y = X_{i(1)} \cup \ldots \cup X_{i(n)} \ldots$ (dove $i_1 \ldots i_n \ldots$ è una sequenza di numeri naturali); cioè, esiste un insieme numerabilw di *aperti* non vuoti tali che ogni *aperto* è rappresentabile come unione numerabile di questi aperti, [226]

Definizione 9. Uno spazio topologico S è detto E-spazio se soddisfa alle seguenti condizioni: per ogni numero naturale n e ogni insieme non vuoto $A \in O(S)$, esistono insiemi non vuoti, a due a due disgiunti $B_1, \ldots, B_n \in O(S)$ per i quali vale:

(i) $B_1 \cup \ldots \cup B_n \subseteq A$ e $B_1 \cup \ldots \cup B_n \neq A$;
(ii) $\overline{A - (B_1 \cup \ldots \cup \overline{B}_n)} \supseteq \overline{A} - A$;
(iii) $\overline{B}_1 \cap \ldots \cap \overline{B}_n \supseteq A - (B_1 \cup \ldots \cup B_n)$.

Date queste definizioni Tarski può dimostrare il seguente

Teorema 5. Ogni spazio topologico normale e denso in sé S con base numerabile è un E-spazio.

La dimostrazione di questo teorema è lunga e molto complessa.

L'interesse di Tarski, come abbiamo detto, è rivolto alla possibilità di interpretare la logica proposizionale classica e intuizionista su spazi topologici. Per far questo usa però i risultati precedentemente descritti ottenuti con il metodo delle matrici. Dato S, spazio topologico, definisce allora univocamente [227] una matrice $O(S)$ come sestupla ordinata $[O(S), S, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim]$, dove $O(S)$ è l'insieme degli aperti dello spazio e come elemento designato si assume S stesso che, essendo l'intero spazio, è un aperto. Le quattro operazioni vengono definite assumendo una particolare precauzione per ciò che concerne $\rightarrow$ e $\sim$ per garantirsi che il risultato delle due operazioni rimanga un aperto. Questo non è necessario per la somma e il prodotto, che per definizione non portano fuori da $O(S)$.

Per X, $Y \in O(S)$, aperti di S:

$X \rightarrow Y = S - \overline{X - Y}$ (o equivalentemente $((S - X) \cup Y)°$
$X \vee Y = X \cup Y$ (ovvero l'ordinaria somma insiemistica)
$X \wedge Y = X \cap Y$ (ovvero l'ordinario prodotto insiemistico)
$\sim X = X \rightarrow 0$ (o equivalentemente $(S - X)°$).

Definite così le operazioni, Tarski stabilisce il seguente [228]

Teorema 6. Per ogni spazio topologico S, $O(S)$ è una matrice.

In questo modo può sfruttare il concetto già definito di soddisfacibilità e validità per le matrici. "La matrice $O(S)$, come ogni altra matrice, determina univocamente un sistema di proposizioni, cioe $C(O(S))$. Possiamo indagare le relazioni di questo sistema con i sistemi $\mathcal{ZK}$ e $\mathcal{JK}$ in dettaglio".[93]

Tarski dimostra che l'insieme delle formule valide nella matrice associata allo spazio topologico S include sempre le formule dimostrabili in logica intuizionista ed è incluso a sua volta in quelle dimostrabili in logica classica. Ciò è stabilito attraverso i due teoremi 7 e 8.

Teorema 7. Per ogni spazio topologico S, $C(O(S)) \subseteq \mathcal{ZK}$.

Teorema 8.Per ogni spazio topologico S, $\mathcal{JK} \subseteq C(O(S))$.

Il problema per Tarski diventa adesso quello di precisare per quali spazi topologici vale anche l'inclusione [229] inversa, cioè se è possibile trovare determinati spazi S per cui valga $C(O(S)) = \mathcal{ZK}$ e altri per i quali valga invece $C(O(S)) = \mathcal{JK}$.

Tarski dimostra che per il caso classico è sufficiente limitarsi a prendere spazi isolati che, come abbiamo visto descrivono una topologia discreta; mentre per il caso intuizionista occorre restringersi agli *E-spazi*, come sono stati definiti in precedenza. È questo-un. teorema di particolare importanza per la logica intuizionista in quanto è un vero e proprio teorema di *adeguatezza*. Il teorema si compone di una parte di pura topologia e di una che consiste grosso modo nel ricostruire all'interno della matrice associata a un E-spazio tutte le matrici di Jaskowski. A questo proposito è particolarmente importante la dimostrazione del seguente:

Lemma 1. Se S è un E-spazio, allora per ogni numero naturale n la matrice $O(S)$ contiene una sottomatrice isomorfa a IK. [230]

Ciò equivale a dire che le formule valide nella matrice associata allo spazio topologico S sono valide in una qualunque matrice di Jaskowski. La restrizione agli E-spazi e agli spazi isolati non è un semplice accorgimento per tirarsi fuori da difficoltà derivanti dalla dimostrazione, ma dipende essenzialmente dall'esistenza di spazi topologici che non sono adeguati nè alla logica classica né alla logica intuizionista ma a *logiche intermedie*.

L'articolo di Tarski si chiude con la dimostrazione di due grossi teoremi fondamentali. Sono teoremi di validità e completezza per la logica classica e intuizionista, la cui dimostrazione è una semplice, conseguenza dei risultati descritti precedentemente.

Per il caso classico abbiamo

PRIMO TEOREMA PRINCIPALE. Sia A una proposizione del calcolo proposizionale e S uno spazio topologico. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) A è dimostrabile nel calcolo classico;

(b) $\sim\sim A$ vale in $O(S)$; [231]

(c) $\sim\sim A$ vale in $O(T)$ per ogni spazio topologico T.

Mentre per quello intuizionista vale

[93] Ivi, p. 435.

SECONDO TEOREMA PRINCIPALE. Sia A una proposizione del calcolo proposizionale e S un qualche E-spazio. Le condizioni seguenti sono equivalenti:

(a) A è dimostrabile nel calcolo intuizionista;

(b) A vale in $O(S)$;

(c) A vale in $O(T)$ per ogni spazio topologico T.

Da (a) verso (b) e da (a) verso (c) abbiamo la *validità* da (c) verso (a) la *completezza*. Il teorema enunciato precedentemente è rappresentato invece dalla freccia che da (b) va verso (a).

La topologia si evidenzia così particolarmente adeguata al fine di un'interpretazione della logica intuizionista. Con questo articolo infatti Tarski mostra come il sistema intuizionista possa essere visto come un vero sistema logico trattabile matematicamente. Si ha così un drastico distacco da quel tipo di problematizzazione che aveva caratterizzato invece il dibattito [232] dei primi anni intorno al pensiero di Brouwer. I risultati ottenuti, anche se non sempre erano soddisfacenti da un punto ci vista strettamente intuizionista, ebbero larga risonanza e molteplici sviluppi successivi. Il sistema logico codificato per primo da Heyting cominciava a mostrare cosi una portata che andava al di là di quanto l'autore stesso avesse in un primo momento potuto presagire, aprendo, di conseguenza anche una rinnovata interrogazione intorno al peso delle idee brouweriane. Si evidenzia cosi come questa opera di formalizzazione abbia in un certo senso dato vita a una creatura autonoma che, rispettando il nucleo fondamentale della proposta brouweriana, la reinserisce definitivamente all'interno del dibattito logico-matematico.