Cartesio, Freud, Brouwer
Verso un'epistemologia dell'inconscio
di Antonello Sciacchitano

Terzo Seminario

Monza, 25 ottobre 2003

Il guado

Il seminario di oggi è quello più importante. Finalmente realizzerò il passaggio dalla logica classica alla debole. O meglio, passerò dalla logica classica, che è unica, al campo delle logiche deboli, che sono molteplici. Come sempre la matematica si fa in più modi; la logica *idem*, quella debole compresa. Mostrerò in dettaglio una sola logica debole, quella intuizionista di Brouwer, e accennerò alla logica minimale di Johansson.

L'indebolimento di cui tratterò oggi si chiama tecnicamente indebolimento binario, perché non indebolisce il principio di bivalenza – i valori di verità sono sempre due e solo due: vero e falso – ma la simmetria troppo stretta tra vero e falso, secondo la quale il vero è il contrario del falso e il falso è *sempre* il contrario del vero. Non butto via la costruzione classica, faticosamente realizzata nei seminari precedenti, ma l'indebolisco proprio su questo punto. Alla fine, pur permanendo l'assioma di bivalenza, falso e vero non saranno più complementari l'uno dell'altro, nel senso che tutto ciò che non è falso è vero e tutto ciò che non è vero e falso. Preannuncio che l'indebolimento introdurrà una dose di indeterminazione, vedrete in che senso.

Indebolire significa non vincolare troppo ma neanche troppo poco

Spiego in che senso intendo indebolimento con un esempio. L'esempio è peregrino per dei medici perché viene dall'architettura. In architettura esistono dei precisi vincoli, soddisfacendo ai quali la casa sta in piedi e, soprattutto, sta ferma e non si mette a girellare per la città. La legge generale afferma che i gradi di libertà di un sistema – in pratica le sue dimensioni – non possono superare i vincoli. Esempio: una pallina di piombo, libera di rotolare su un piano, ha due gradi di libertà, perché può muoversi in due direzioni ortogonali, tra loro indipendenti; un treno su un binario ha un solo grado di libertà, perché può muoversi in una sola direzione, avanti o indietro. Per vincolare la pallina a stare ferma devo dare due vincoli, uno per ogni direzione; per vincolare il treno ne basta uno, per esempio un semaforo rosso in una stazione di testa. Lo stesso per le barriere che ostacolano il movimento della pallina: devono essere barriere ad angolo retto, una per bloccare il movimento destra-sinistra e l'altra il movimento avanti-indietro. Una costruzione sta ferma in piedi quando i vincoli sono almeno uguali ai suoi gradi di libertà. Se i vincoli sono meno dei gradi di libertà, la casa va per i fatti suoi. Ma bisogna fare attenzione anche al caso contrario, mi fa notare mia figlia Lavinia che è architetto. Se i vincoli sono molti più dei gradi di libertà, la casa sta certamente in piedi ma la struttura diventa sovravincolata, con il rischio che, essendo troppo rigida, diventi fragile. Infatti, se i vincoli sono troppi, alcuni possono entrare in conflitto e agire uno contro l'altro, fragilizzando la struttura. Ne sa qualcosa l'utente di PC. Le cosiddette estensioni di applicazioni standard possono entrare in conflitto con i programmi preesistenti o produrre disattivazioni immediate del funzionamento.

Qualcosa di analogo succede in logica, dove si parla di *sistemi massimali* per designare quei sistemi talmente fragili che, aggiungendo loro un vincolo in più, nel caso una formula non tautologica, diventano inconsistenti. Il calcolo proposizionale di Frege è massimale: non sopporta più assiomi – più vincoli – di quelli che ha. Aggiungendone uno in più – *Per qualche dollaro in più* – la logica va in *tilt*, perché non sopporta più vincoli – più assiomi – di quanti non ne abbia già. Nella mia presentazione della sintassi senza assiomi ma con sole regole, questo fatto della presenza in logica di vincoli, sotto forma di presupposti, non viene messo bene in luce. Ma spero lo stesso di mostrarvi quali sono i vincoli eccessivi, i presupposti potenzialmente assurdi, della logica classica. Sono vincoli o presupposti latenti, ma spero di riuscire a portarli alla luce, per potere allentarne almeno uno.

Che la logica classica sia sovravincolata, lo dimostrano certe sue incongruenze. Le quali non sono vere e proprie contraddizioni ma almeno al non senso si avvicinano molto. Il fatto che, date due proposizioni qualsiasi p e q, o una implica l'altra o l'altra implica l'una è un vero e proprio non senso. Ho presentato il contromodello probabilistico. Esso dimostra che tale "legge" è un artefatto del binarismo forte della logica classica. Si tratta di un teorema, più che falso, improprio, frutto della rigidità eccessiva dei vincoli della logica classica, ossia della categoricità dei suoi presupposti. Ma più grave secondo me è la possibilità di ridurre i quattro connettivi a due. Perché, mi chiedo, perdere la forza logica di due connettivi, "schiacciandoli" sugli altri due? È fare torto al principio di comprensione. Se si riesce a pensare l'implicazione, perché ridurla all'alternativa (legge forte di Filone)? Se si riesce a pensare l'alternativa perché ridurla alla congiunzione (legge forte di de Morgan). Non è difficile vedere che tale riduzione, condotta in nome di leggi forti, è in realtà una forzatura. Insomma, la logica classica non "vede" le differenze tra gli stessi operatori che usa. Ne usa almeno due alla cieca, confondendoli con gli altri due. In nome della forza perde metà della propria forza di analisi strada facendo. L'economia di operatori serve solo all'economia del processo produttivo capitalistico, che risparmia nella costruzione dei *chip* del computer. Un problema che non ci riguarda. A noi interessa andare a fondo delle differenze piuttosto che obliterarle.

Considero il caso della legge ontologica del terzo escluso: *p vel non p*. Per la legge forte di de Morgan posso scrivere equivalentemente *non*(*non p et non non p*). Per la legge forte di doppia negazione posso cancellare la doppia negazione. Alla fine ottengo come scrittura equivalente: *non*(*non p et p*). Risultato del binarismo classico: la legge del terzo escluso equivale al principio di non contraddizione! Ma perché mai Aristotele sentì il bisogno di concepire due leggi per la sua ontologia, addirittura tre con il principio di identità? Evidentemente non gliene bastava una, neppure il fondamentale principio di non contraddizione. Forse aveva in mente qualcosa di più ricco che la ristrettezza della logica classica non consente di formulare. Perché la verità del binarismo forte è, non tanto paradossalmente, proprio la sua inversa: forte sì, ma anche povero. Il binarismo forte è come certi governi forti o certe scuole ultraortodosse che per paura del dissenso non favoriscono la pluralità delle espressioni culturali, con il risultato che isteriliscono la democrazia al loro interno e alla fine inibiscono l'evoluzione del pensiero stesso della comunità (il *Denkkollektiv*, secondo la felice espressione di Ludwik Fleck).

Le ragioni dell'indebolimento

Prima di passare all'indebolimento vero e proprio cerco di formulare le ragioni che lo giustificano. Le ragioni appena riportate sono di ordine negativo. La comparsa di leggi improprie e la perdita di differenze analiticamente importanti sono due segnali che in logica classica qualcosa non va e consigliano di dare una revisionata al motore. Ma la revisione non porterebbe necessariamente all'indebolimento, se non ci fossero ragioni positive che espressamente lo consigliano. Le ragioni negative mi inducono a sospendere la logica classica ma non mi indirizzano verso qualche soluzione alternativa.

Ma ci sono ragioni positive per optare per l'indebolimento, per ridurre, cioè, il numero di vincoli, come dicevo prima, e avvicinarlo al numero dei gradi di libertà. Semplice da dirsi, ma nel nostro caso un po' difficile da farsi, perché i vincoli, dicevo, sono latenti. Infatti, i vincoli non sono espressi direttamente da assiomi, da presupposti del calcolo, talché sia facile ridurli riducendo il numero di assiomi. La sintassi è composta solo da regole. Come procedo? Devo ridurre il numero delle regole? Non posso, altrimenti perdo connettivi. Devo ridurre la forza – l'applicabilità – delle singole regole. Ma quali? E quante? Tutte? Qualcuna? Per ora non ho idea di come fare. Allora, vado più piano nell'analisi del problema.

Torno al segno di Frege $\vdash$. Finora l'ho usato utilizzando solo il suo lato destro, per dire che la formula a destra è un teorema. Ma il suo lato sinistro non è vuoto, anche se non c'è scritto nulla. Ci sono le assunzioni implicite del sistema. Tra i tanti modi in cui si può fare logica a livello sintattico c'è il calcolo dei sequenti di Gentzen che utilizza entrambe le facce del simbolo di Frege. Esso pone fbf sia a sinistra sia a destra, rispettivamente, a sinistra le assunzioni – assiomi, vincoli e presupposti – e a destra le conseguenze. (Giustamente, scrivendo noi da sinistra a destra, Gentzen pone i presupposti a sinistra, perché di solito i presupposti vengono prima delle conseguenze, che vengono dopo). Non entro nei dettagli di questo calcolo, che in un certo senso sarebbe da privilegiare, perché con più facilità di altri permette di dimostrare metateorema sul modo di ottenere teoremi. Dico solo che la scrittura abituale per indicare che la formula α è un teorema: $\vdash \alpha$ riceve nel calcolo di Gentzen un'interpretazione interessante. Dice che una formula è un teorema se dipende da zero assunzioni, cioè se non ha altri presupposti se non quelli impliciti nel calcolo.

In generale, capite bene che, se a sinistra del segno di Frege ci sono molti presupposti, più o meno taciti, le conseguenze a destra vengono a dipendere da quei presupposti, magari effettivamente da uno solo di essi ma senza escludere che dipendano da tutti. In ogni caso una formula a destra è condizionata dalle formule a sinistra. Tanto più numerose sono i presupposti a sinistra, tanto maggiori sono i vincoli alla validità della formula di destra come teorema. È pertanto ragionevole preferire logiche dove la stessa formula diventa teorema sotto minori condizioni vincolanti, cioè a partire da un minor numero di presupposti. Perché? Perché, allora, dipendendo da un minor numero di presupposti, la formula avrà portata più generale. Il contraddittore, che voglia confutare la mia formula, avrà tanto più buon gioco contro di me, quanti più presupposti metto in campo per difenderla. In questo caso è proprio vero che più mi fortifico più mi indebolisco. Più sono i presupposti dietro cui mi trincero, più sono i punti in cui posso essere colpito.

Provo a dirlo in termini meno antropomorfi di attacco e difesa. Aumentando il numero dei presupposti, si restringe il campo di validità della formula che da essi discende. Questa considerazione dovrebbe esservi familiare. Pongo l'implicazione:

$$(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \Rightarrow \omega.$$

Le probabilità di trovare un contromodello sono tanto maggiori quanto più numerose sono le premesse. Infatti, falsificando,

$$\mathbf{F}((\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \Rightarrow \omega)$$

Si ottiene:

$$\mathbf{V}(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma), \mathbf{F}\omega;$$
$$\mathbf{V}\alpha, \mathbf{V}\beta, \mathbf{V}\gamma, \mathbf{F}\omega.$$

Le possibilità di contraddire ω, quindi di dimostrare il teorema ω, stanno nell'intersezione di α, β, γ. Se avessi aggiunto un'altra premessa, per esempio δ, il campo di validità di ω, si sarebbe ulteriormente ristretto all'intersezione di α, β, γ e δ. Per convincervene dimostrate per

ESERCIZIO 1. $\vdash (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \delta) \Rightarrow (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$, ma non viceversa.

Questo tipo di ragionamento in "estensione" mi convince di più, essendo più meccanico, di quello in "intensione" di attacco e difesa da un nemico immaginario. Soprattutto il ragionamento meccanico mi permette di andare avanti e dire che, se riduco il numero dei presupposti a sinistra del segno di Frege, anche le conseguenze saranno valide in un campo più ampio, perché ho tolto più vincoli alla sua validità, che risulta meno condizionata da certe presupposizioni o ipotesi. (*Ipotesi* in greco significa *supposizione*. Nella logica medievale, di cui resta poco o nulla, la *suppositio* indicava la coordinazione di un concetto sotto un altro.).

Tornando al nostro problema dell'indebolimento, l'interesse di indebolire la logica è di ampliare il suo campo di validità. Una logica più debole è più generale. La conquista della generalità è un tratto tipico dell'operatività matematica. Esso va di pari passo all'indebolimento e alla semplificazione, in questo caso la semplificazione dei presupposti. Il desiderio del matematico è generalizzare. Se a un matematico dici: "Ho trovato questa proprietà interessante del numero 3", si chiede se vale per il 4, per il 5 e, *in generale* per *n*. Per lo più la generalizzazione si accompagna a una semplificazione. La dimostrazione per *n*, fa piazza pulita di tutte le dimostrazioni particolari. È successo così per l'ultima congettura di Fermat. Fino a qualche anno fa si conoscevano dimostrazioni particolari del fatto che la somma di due cubi non è mai un cubo, che la somma di due quarte potenze non è mai una quarta potenza ecc., mentre da Pitagora sappiamo che la somma di due quadrati può essere un quadrato. Grazie a Andrew Wiles, che l'ha dimostrata con folle un lavoro trentennale di generalizzazione, posso dimenticare le dimostrazioni particolari per 3, per 4, per 5 ecc., magari con un pizzico di nostalgia perché alcune erano ben congegnate, nonché aperte su nuovi orizzonti matematici (penso ai numeri ideali di Kummer). La generalizzazione – il fatto che la congettura ora valga per tutti gli interi maggiori di 2 – sembra chiudere il discorso. Non è così. Ora posso legittimamente sperare che qualcuno trovi una dimostrazione più elementare di quella di Wiles.

Generalizzare o indebolire è il sintomo che stiamo navigando in mari matematici. Indebolire la logica vuole pertanto dire renderla più matematica e meno metafisica. Più epistemologica e meno ontologica, più vicina al sapere che al fondamento dell'essere o ai fondamenti *tout court*. L'indebolimento della logica classica è quindi un fatto normale della pratica matematica. È avvenuto con Brouwer perché doveva avvenire. Se non fosse stato per lui l'indebolimento sarebbe avvenuto per merito di qualcun altro e forse senza merito, perché era nell'ordine delle cose matematiche. Qualcuno doveva pur segnalare *L'inattendibilità dei principi logici* (1908), proprio così si intitolava uno dei primi contributi di Brouwer alla costruzione intuizionista. Ma questa era solo la *pars destruens* del suo discorso. Gli serviva per costruire la successiva. Nella *pars construens* Brouwer mise davanti agli occhi di tutti che la logica è solo un caso particolare della matematica – e non viceversa, come confermerà Gödel, da sempre simpatizzante intuizionista. La logica è una parte della matematica, che si può estendere, cioè generalizzare attraverso indebolimenti successivi. A noi l'indebolimento binario sembra un fatto eccezionale perché la logica, con le sue leggi ontologiche fondamentali (identità, non contraddizione e terzo escluso) è stata immeritatamente sopravvalutata nella storia del pensiero occidentale come vertice trascendentale del pensiero stesso e suo immutabile fondamento. L'*Organon* di Aristotele o la *Scienza della logica* di Hegel, tanto per citare i due più grandi filosofi sistematici, presentano la logica come *lo strumento* – al singolare, mai plurale! – unico e necessario per sondare l'essere. Anche la filosofia di Heidegger, che in un certo senso è innovativa rispetto a tradizioni metafisiche forti, ha un riferimento costante alla logica. "Vogliamo *scuotere* la logica", dice Heidegger in un suo inedito del 1934, perché ci sveli il segreto del *logos* greco. Ebbene, il segreto del *logos*, questo il filosofo non può saperlo, è extralogico, sta nell'*arithmos*, nel numero.

La logica, invece, si può trattare come un oggetto matematico qualunque e come qualunque oggetto matematico può diventare bersaglio delle nostre passioni odioamorose. La matematica annuncia la sua buona novella. Innanzitutto la logica non fa riferimento ad alcun fondamento unico e, in secondo luogo, è un po' meno fondamentale di quanto si immagini. Si tratta di un immaginario collettivo. Tutti noi istintivamente poniamo la logica al vertice delle nostre certezze. Siamo abituati a dire "è logico" per dire "è naturale" o "è indiscutibile". Invece, forse è meglio discutere. Io stesso non sarei qui a parlarvi di indebolimento binario se avessi proposto a Fulvio un seminario di matematica, invece che di logica. Perché? Perché la tirannia del senso comune non ha ancora sdoganato la matematica come patrimonio del pensiero collettivo (o patrimonio collettivo del pensiero). Per il senso comune è patrimonio del pensiero, invece, la logica. L'indebolimento vuole correggere l'unilateralità logocentrica, che suppone la verità a servizio della logica e considera la matematica, ossia il sapere, chissà… roba da pazzi.

Una ragione a posteriori per indebolire la logica a matematica

Comincio supponendo di aver indebolito la logica classica, anche se non so ancora bene come. Essendo diventata matematica, in logica debole si dimostrano teoremi. Che caratteristiche presentano i teoremi della logica debole rispetto a quelli già dimostrati in logica classica? (Anche lei è matematica, povera, anche se i classici non lo sapevano). Se non ci fossero differenze non varrebbe la pena di penare tanto per ottenere l'indebolimento. Ebbene, le differenze ci sono e spingono retroattivamente a consolidare l'indebolimento. Questo è il mio piccolo apporto originale. Non vi ho presentato solo un *excursus*, sommario e per tanti versi forzato, di storia della logica. Vi darò anche un mio contributo personale. Il quale non consiste di nuovi teoremi. I teoremi che vi presenterò sono stranoti. Meno noto è il fatto che si possono interpretare come teoremi epistemici. Il mio contributo è tutto qui. Ma è anche una ragione in più per indebolire la logica classica. Dove, data la ristrettezza dello spazio logico, non c'è modo di interpretare i teoremi dal versante del sapere. Non c'è modo di introdurre un soggetto, o un Altro, che sa. I teoremi sono veri e basta, in senso assoluto. Non c'è bisogno né modo di supporre un soggetto che sappia. Invece, in logica debole c'è la possibilità di definire operatori epistemici che godono di proprietà molto simili agli operatori dell'inconscio freudiano. L'esistenza di un soggetto dell'inconscio, con le sue pretese di sapere, perché non sa ancora quel che sa, è stata la ragione che – lo riconosco a posteriori – mi ha guidato in questa mia ricerca, che a molti di voi può sembrare bizzarra, sull'indebolimento binario.

Sono stato fortunato. Il mio tentativo è stato premiato dalla scoperta di una piccola novità. Giocherellando con i teoremi della logica, tanto per impratichirmi, come fate voi ora, con il metodo dimostrativo di Beth, ho scoperto che, eseguendo il passaggio debolista, invece di perdere – come suggerisce la parola – si guadagna qualcosa. Ora sono qui, non più in un contesto di ricerca, ma di giustificazione, a presentarvi i risultati della mia ricerca. (Tra parentesi, io sono ricercatore, non maestro. So insegnare solo i risultati della mia ricerca). La logica debole guadagna la possibilità di parlare – sono incerto sul termine esatto da usare – del sapere. In ultima analisi, una volta indebolita, la logica acquisisce la possibilità di parlare di se stessa, quindi del proprio sapere.

Anna Rosa Ciuffreda. È metalogica?

Largo alla metalogica

Sì, in parte. La logica debole, a differenza della classica, incorpora in sé parte della metalogica che la riguarda. La volta scorsa ho chiuso il seminario con riferimento alla completezza della logica e l'incompletezza dell'aritmetica. Ho affermato che responsabile dell'incompletezza dell'aritmetica è la sua potenza espressiva, grazie alla quale essa può parlare delle proprietà di cui gode come un tutto. Infatti, la frase metaaritmetica "in aritmetica esiste una fbf non dimostrabile" si trascrive all'interno dell'aritmetica grazie a una tecnica sofisticata di codifica, detta gödelizzazione. Semplificando molto, affermo che anche la metaaritmetica si aritmetizza. Concludo che frase tra virgolette è vera, ma non dimostrabile, quindi che l'aritmetica è incompleta semanticamente (e, per la correttezza, anche sintatticamente). In logica, che è meno ricca espressivamente dell'aritmetica, una frase metalogica analoga al paradosso del mentitore, dove il soggetto dell'enunciato viene a coincidere con il soggetto dell'enunciazione, non può essere travasata nella logica oggetto, quindi la completezza della logica non viene compromessa.

Il risultato collaterale – rilancio la domanda della Ciuffreda e preciso la risposta – è che tra aritmetica e metaaritmetica il confine è più sfumato di quello tra logica e metalogica. Il canale tra aritmetica e metaaritmetica è pervio. Invece, in logica si può distinguere logica da metalogica in modo più netto che in aritmetica. Quindi, si può parlare di parziale innesto del "fuori" della metalogica nel "dentro" della logica. Dico parziale proprio perché la metalogica non è riducibile senza residui alla logica oggetto. La parziale riducibilità della metalogica alla logica sarebbe un tratto caratteristico della logica epistemica debole. Darò in seguito alcuni teoremi di inserzione della metalogica in logica debole.

I discorsi epistemici

La matematica si può fare in tanti modi – è il ritornello di fondo che ritorna – anche se poi tanti modi si dimostrano *a posteriori* equivalenti. Anche la logica epistemica si può fare in più modi. Non deve sembrare strano che la logica epistemica si possa fare in direzione opposta alla mia, addirittura rinforzando la logica classica, aggiungendovi, cioè, nuovi vincoli, rappresentati da assiomi che definiscono implicitamente gli operatori epistemici. Illustrerò anche questa possibilità, primo, per meglio chiarire la differenza tra il mio approccio e gli approcci alternativi, e, secondo, per togliere a chi sente parlare di queste cose per la prima volta l'impressione che la logica epistemica sia una mia invenzione o un mio pallino. In ogni caso sappiate che il mio approccio non è l'unico possibile, ma si inserisce in un ventaglio di soluzioni non tutte tra loro equivalenti. Ripeto, non sono un maestro che rivela *la* verità trascendentale; sono un ricercatore cui interessa scovare delle possibilità che sono sfuggite ad altri.

(*Entra il prof. Carta*). Ciao Italo. Hai perso solo i piaceri preliminari. Adesso vado al sodo.

La forza classica

La domanda strategica è: cosa rende forte la logica classica? Da cosa dipendono certe conseguenze spiacevoli come le leggi improprie e la povertà espressiva? In merito alla diagnosi delle cause la sintassi di Beth ha la sua da dire, e forse anche in merito alla terapia. La forza della logica classica consiste nella simmetria completa tra vero e falso. Per la legge di doppia negazione il vero è il contrario del falso e il falso è il contrario del vero. Tra i due valori si istituisce una complementarità che, in un certo senso, li rende equivalenti. Le tautologie sono tante quante le contraddizioni, li divide solo un segno di negazione: la contraddizione è una tautologia negata, la tautologia una contraddizione negata. Ma la doppia negazione è un teorema della logica classica. Non posso eliminarla direttamente, per esempio introducendo la sua negazione come assioma, perché scardineremmo il sistema. Devo procedere in modo più *soft*, a monte, come si diceva una volta. Devo mettermi in condizione di non derivare la doppia negazione come teorema. Vedrete che ci riuscirò.

Al contrario della fisica, dove introduce una forza, in logica la rottura della simmetria introduce una debolezza. Si tratta di individuare, allora, dove in pratica agisce la simmetria tra vero e falso, per poter realizzare l'indebolimento in modo mirato. Per ottenere i risultati che vi ho anticipato: la generalizzazione della logica, la sua estensione insieme alla possibilità di inserire parzialmente la metalogica nella logica, il lavoro da fare è solo indebolire la simmetria aletica, ossia la simmetria tra vero e falso. Chiaro, mi sembra, ma dove concretamente operare? dove intervenire con la nostra chirurgia, posto che non posso tagliare assiomi, essendo già ridotti a poco sopra lo zero (calcolando anche l'assioma di bivalenza)?

Riprendo in mano la tabella delle regole deduttive della logica classica, che ho presentato la volta scorsa. Ho già fatto notare che essa incorpora un assioma: l'assioma di bivalenza. Per tale assioma i valori di verità sono solo due e solo due sono le marche aletiche: **V** e **F**, che le regole trattano. Infatti, le regole trasformano formule marcate in formule marcate, in modo monotono: le marche, che erano due prima della trasformazione, rimangono due anche dopo la trasformazione. La trasformazione non altera il loro numero, introducendone di nuovi. In fondo questa monotonia dei valori di verità presuppone un vincolo. Controllo se nella tabella non esistano altre monotonie. Se ne scopro qualche altra avrò individuato un nuovo vincolo e forse la possibilità di indebolirlo.

La monotonia del vero e *del falso*

Esaminiamo più da vicino com'è fatta una regola deduttiva di Beth. Innanzitutto ci sono due righe separate da una linea di frazione. Tale linea divide due passi della dimostrazione: sopra stanno i risultati della dimostrazione ottenuti fino al passo precedente, sotto i risultati calcolati al passo attuale. Insomma, le regole di Beth sono regole prima-dopo. In generale – anche questa è una monotonia – sono regole di riscrittura. Riscrivono le formule del passo precedente nelle formule del passo successivo. Ma si tratta di una riscrittura particolare. Infatti, si tratta di una cancellazione. Cancellano il connettivo e trascrivono la formula senza di esso ma con nuove formule marcate. Così è per tutti i casi: una monotonia si direbbe. Posso intervenire modificandola? Direi di no, perché, invece di ottenere un indebolimento, bloccherei il processo dimostrativo che porta dalla falsità della formula da testare alla verità (o falsità) delle sue componenti elementari non ulteriormente analizzabili (e quindi da trascrivere tali e quali): le variabili proposizionali e i predicati calcolati su particolari *n*-ple di individui.

Ma a guardar bene si nota un'altra ripetizione dell'identico, che percorre l'intera tabella da cima a fondo. C'è la lettera *S* che si ripete tale e quale in tutte le celle. Cosa significa? *S* è un insieme *finito* (*S* da *set*). Cosa contiene? Tutte le formule marcate già acquisite nei passi precedenti, che non sono messe a fuoco dalla particolare applicazione della regola, ma che non sono per questo trascurabili. Sono fbf arrivate al capolinea, che si trascrivono tale e quali, e fbf ancora da trascrivere nei passi successivi senza connettivi. Per esempio, nella falsificazione della negazione, la riga superiore della regola prende in considerazione le formule finora trascritte, che riunisce nell'insieme *S*, più la formula in questione. In formule:

S, $\mathbf{F}\neg p$.

Cosa prescrive la regola? Cosa devo scrivere al passo successivo della deduzione? La regola mi prescrive di scrivere, come si sa da millenni, la verità dell'affermazione: $\mathbf{V}p$. Ma il mio compito non finisce lì. Devo anche trascrivere le formule che non sono state esplicitamente prese in considerazione dalla regola. Insomma, devo trascrivere le fbf marcate di *S*, *tutte e tali e quali* come le ho trovate prima dell'applicazione della regola senza eccezioni. Questo è un bel vincolo. Significa che non posso per nessuna ragione alterarle. Se una formula è marcata **F**, devo trascriverla con la marca **F**; se è marcata **V**, devo trascriverla con la marca **V**, senza commettere errori di trascrizione come gli amanuensi medievali. Nel caso precedente, la nuova riga della deduzione è:

S, $\mathbf{V}p$.

Ecco, allora, emergere il vincolo classico in tutto il suo splendore. Si tratta della legge della monotonia (o permanenza o conservazione o persistenza, chiamatela come vi pare) delle marche. Tale legge prescrive che le formule non trascritte da qualche regola conservino la marca che hanno già, *vera o falsa che sia*. La legge forza l'applicazione di nuove regole finché non si arrivi a fbf marcate non ulteriormente analizzabili, le quali conservano indefinitamente la loro marca, marchiate in eterno.

Ma la legge di monotonia delle marche non è altro che la legge di simmetria tra vero e falso. Infatti, essa si spezza in due sottoleggi: la legge di monotonia del vero e la legge di monotonia del falso. Rispetto al tempo logico della deduzione, da un certo punto in poi, il vero e il falso si conservano indefinitamente: il vero si conserva come vero, il falso come falso. Per indebolire la logica classica devo, pertanto, sospendere una delle due leggi di monotonia. Solo allora avrò rotto l'incantesimo che pone vero e falso in un rapporto di reciprocità speculare.

La monotonia del vero

Quale delle due monotonie sospendo? Quella del vero o quella del falso? Quale monotonia conservereste voi, quella del vero o quella del falso?

Tutti sorridono sotto i baffi. La risposta è sulle labbra di tutti.

Intuitivamente nessuno rinuncia al vero una volta guadagnato, magari a fatica. Mi state dicendo: meglio sospendere la monotonia del falso. La ragione è che nella nostra cultura, da Platone in poi, l'idea di vero è correlata a quella di bene e quella di falso a quella di male. Per i cristiani il diavolo è colui che mente sapendo di mentire, equivalente simmetrico del dio non ingannatore di cartesiana memoria. In realtà, l'alternativa è mal posta. Se falso e vero sono simmetrici, è indifferente quale legge di monotonia si sospende. Per realizzare l'indebolimento basta introdurre una dissimmetria che rompa l'equilibrio tra vero e falso e faccia pendere la bilancia da uno dei due termini. Tradizionalmente, la logica è aletica, cioè è il *logos* della verità. Mi inserisco nella tradizione se mantengo la monotonia del vero e sospendo quella del falso. A Pilato che chiedeva a Gesù: *Quid est veritas*? la logica risponde: la verità è ciò che si conserva (e forse si accresce), la falsità è ciò che perisce. La verità è dura: dura nel tempo. La falsità, invece, ha le gambe corte e prima o poi viene smentita. Notate che l'indebolimento forza a porre in relazione i fatti della verità con le vicende temporali, un dettaglio teorico trascurabile per la logica classica, che è la logica dell'eterno (o dell'istante). Ci tornerò, non prima di aver difeso in una certa misura i diritti del falso. Il debolista non è manicheo: non suppone tutta la ragione dalla parte del bene e del vero e tutta la sragione dalla parte del male e del falso.

In realtà, l'alternativa tra i due indebolimenti non si pone neppure. Indebolendo il vero, decadrebbe il principio di contraddizione, cioè il principio che nega l'ambivalenza e respinge la possibilità che una variabile proposizionale sia contemporaneamente vera e falsa. Verifichiamolo. Da $\mathbf{F}\neg(p \wedge \neg p)$ si deduce $\mathbf{V}(p \wedge \neg p)$, cioè $\mathbf{V}p$, $\mathbf{V}\neg p$. Al passo successivo $\mathbf{V}\neg p$ diventa $\mathbf{F}p$. A questo punto, se il vero acquisito non permanesse, non si realizzerebbe la contraddizione $\mathbf{V}p$, $\mathbf{F}p$ e il teorema di non contraddizione non si dimostrerebbe. Una logica senza principio di non contraddizione è esposta al collasso, potendosi dimostrare tutto e il contrario di tutto. (Un punto da ricordare ai fautori, di estrazione fenomenologica, del principio anticartesiano di ambivalenza e indistinzione dei vissuti).

Quindi, riassumendo, la situazione in cui mi trovo è: o mantengo entrambe le leggi di monotonia o conservo la monotonia del vero e indebolisco quella del falso. In questo caso si tratta di intervenire sulle regole di trascrizione del falso. Sì, ma come? Su quale delle sei intervengo? Su tutte o solo su qualcuna?

Il falso come sapere da correggere

Le prime tracce di rottura della simmetria tra vero e falso si trovano nei pensatori del Rinascimento, che chiudono con la scolastica medievale, più in Bruno (contro la scolastica cattolica) e Spinoza (contro la scolastica rabbinica), meno in Cartesio (contro la neonata scolastica protestante, in particolare olandese). In effetti, si capisce facilmente perché la scolastica, di qualunque estrazione sia, abbia bisogno della dicotomia forte vero/falso. La scolastica suppone dogmaticamente che tutto il vero, cioè il Sommo Bene, sia dentro la scuola e tutto il contrario del vero, cioè il falso e il male, sia fuori dalla scuola. Senza tale binarismo forte la scuola non avrebbe senso di esistere. Viceversa, il debolista si propone di sospendere il parallelismo vero/falso = dentro/fuori per farla finita con il discorso scolastico e il fanatismo che induce.

Sentite cosa dice Spinoza a proposito del falso nella seconda parte dell'*Etica*.

Nelle idee non vi è nulla di positivo per cui sono dette false (Proposizione 33).

La falsità consiste nella privazione di conoscenza che inerisce alle idee inadeguate, ossia mutile e confuse – quindi a gran parte degli affetti e delle passioni, che per Spinoza sono il luogo privilegiato del falso. (Proposizione 35).

Lo si potrebbe, e non sarebbe difficile, scambiare per intellettualismo. Invece si tratta del passaggio, caratteristico della modernità, dalla concezione aletica, classica e medievale, del falso, come contrapposto al vero, alla concezione epistemica moderna e scientifica che fa del falso un componente del sapere. Poi Spinoza si spinge troppo in là in terreno teologico dove non lo seguo più. Il falso è sapere di serie B rispetto al vero, che è sapere di serie A, perché il primo non è in dio ma il secondo sì. Dio funziona per Spinoza come una sorta di teorema di completezza, un contenitore che contiene tutto il vero e tutto l'intellegibile o, diremmo noi, il dimostrabile. In fondo Spinoza non rompe definitivamente con il vecchio logocentrismo, che in lui diventa monopanteismo. Ma come, da freudiani, non condividere la sua concezione epistemica del falso? Lo psicanalista freudiano lavora quotidianamente con il falso, sia con i falsi nessi nevrotici sia con i lapsus della vita di tutti i giorni.

La falsità è, insomma, un sapere relativo a certe idee, cioè in termini freudiani, relativo a certe rappresentazioni. Le rappresentazioni inconsce sono essenzialmente false, nel senso che nell'inconscio non esistono le rappresentazioni, come fotocopie della realtà, ma esistono le loro metafore: i rappresentanti della rappresentazione, le *Vorstellungrepräsentanz*, tecnicamente i significanti del desiderio. Ma i significanti sono componenti del sapere. Il sapere è fatto di significanti. Quando dico "Elena è una rosa" non rappresento Elena, ma segnalo un rappresentante della rappresentazione "Elena", quel tratto di quella rappresentazione che mi ha fatto innamorare. È chiaro che sto giocando con il falso, anzi con il fuoco, in questo caso erotico, ma se sono un poeta ci so fare con i significanti.

Nella concezione epistemica il falso non è il mero contrario del vero, ma è solo una forma di sapere meno adeguata all'idea rispetto al sapere inerente al vero. Precisamente, grazie all'intuizionismo, oggi si può tenere sul falso un discorso meno idealistico di quello di Spinoza. Dopo Cartesio si considera falsa – o meglio, meno vera – una fbf se non se ne conosce la dimostrazione, cioè se è una congettura. Ricordate che Cartesio, all'inizio del suo processo dubitativo, attribuiva il valore falso a tutto ciò che risultava dubitabile. Ma, anche senza poterla dimostrare e anche se si deve dubitarne, una congettura contiene sempre un po' di sapere. Il suo valore epistemico non si azzera del tutto. La congettura di Goldbach, che afferma che ogni numero pari è la somma di due primi, è tuttora indimostrata, quindi è intuizionisticamente falsa, ma di lei si sa qualcosa, anzi molto, quindi non è completamente falsa. Si sa che è vera per il primo miliardo di numeri pari. Addirittura Vinogradov ha dimostrato che, a partire da un certo numero naturale, che non si sa quale sia ma si sa che deve essere molto grande, la congettura è vera. Quindi, non è scorretto dire che non è completamente falsa. Pertanto, nella misura in cui contiene un po' di sapere, il falso può essere utilizzato in tanti modi: in logica nelle deduzioni, nella vita amorosa per sedurre l'amata con poesie, in tribunale per contraddire l'accusa, in analisi per attraversare il fantasma o visitare la scena primaria, in laboratorio per preparare un esperimento sulla base di un'ipotesi di lavoro da falsificare. L'uso "corretto" del falso è la sua correzione: la trasformazione da sapere inadeguato a adeguato. Dall'indebolimento del binarismo classico nasce un'epistemologica correttiva, anzi autocorrettiva. Ma per correggerlo, condizione necessaria è che il falso non permanga in modo monotono, conservandosi sempre uguale a se stesso. Il falso epistemico deve avere la caratteristica dell'instabilità, per poter essere cancellato, o addirittura la caratteristica della variabilità per poter essere corretto in vero. Il falso sapere si deve o poter buttare via o potere correggere. (Il viceversa è intrigante: il sapere che né si corregge né si butta via da troppo tempo, sarà ancora vero sapere? Certe fedi millenarie sono ancora autentiche? Il vero si conserva, dicevo. Ma ciò che si conserva, si conserva vero? mi chiedo.)

Nelle dimostrazioni che oggi darò il falso compare, si trasforma in vero attraverso la negazione, ma a volte scompare, cioè non permane indefinitamente lì dov'è emerso. In altri termini, in logica debole funzionano delle restrizioni alla permanenza del falso che, senza annullare del tutto le sue potenzialità dimostrative, lo rendono caduco, per non dire effimero. Il risultato finale è che il vincolo di simmetria tra vero e falso si allenta e la simmetria diventa meno perfetta, più obliqua. Diventa, lo dico chiaramente, un'asimmetria. Il contrario del vero è il falso, *sempre e comunque*, esattamente come in logica classica; ma – qui la simmetria viene meno – il contrario del falso è il vero con certe restrizioni collaterali, che tengono conto del contesto in cui l'operazione avviene. Ecco uno dei primi risultati dell'asimmetria tra vero e falso.

Terzo escluso escluso dai principi

Mostro su un esempio come funzionano le restrizioni sulla permanenza del falso in un esempio ormai noto, il terzo escluso, TE. Metto in parallelo le due dimostrazioni, classica e intuizionista. Il primo passo è uguale in entrambe: la falsificazione della fbf.

Dimostrazione classica di TE	Dimostrazione intuizionista di TE
$(p \vee \neg p)$	$(p \vee \neg p)$
$\mathbf{F}(p \vee \neg p)$	$\mathbf{F}(p \vee \neg p)$

Anche il secondo passo non presenta differenze tra i due modi. Sulla falsificazione dell'alternativa non si discute più ormai. Classici e intuizionisti concordano. Essa è falsa sse entrambi i termini sono falsi.

Dimostrazione classica di TE	Dimostrazione intuizionista di TE
$(p \vee \neg p)$	$(p \vee \neg p)$
$\mathbf{F}(p \vee \neg p)$	$\mathbf{F}(p \vee \neg p)$
$\mathbf{F}p, \mathbf{F}\neg p$	$\mathbf{F}p, \mathbf{F}\neg p$

A questo punto non resta che lavorare sulla falsificazione della negazione. Qui le concezioni classica e intuizionista divergono. Per i classici, a cominciare da Aristotele, *la* negazione è falsa se l'affermazione è vera. Quindi, la falsificazione della negazione porta *sempre e comunque* alla verità dell'affermazione. Anche per gli intuizionisti *una* negazione è falsa se l'affermazione è vera, ma gli intuizionisti si autorizzano un po' meno dei classici a falsificare la negazione. Falsificano la negazione ($\mathbf{F}\neg p$) verificando l'affermazione ($\mathbf{V}p$), solo condizionatamente: a patto, cioè, di cancellare *tutte* le altre fbf marcate **F** vicine alla fbf trasformata. In pratica, cancellano tutte le fbf che non siano vere presenti nella parentesi cui si applica la regola, ossia lasciano cadere come foglie morte le fbf false, ottenute fino a quel punto nello stesso ramo deduttivo dell'albero. Se volete, le regole intuizioniste sono più che "spitinfie", selettive, addirittura monoselettive. Concedono una sola volta di falsificare la negazione. (La restrizione è analoga al vincolo del calcolo di Gentzen, che ammette una sola fbf a destra del segno di Frege). Se al passo n-esimo si potessero falsificare più negazioni, bisognerebbe scegliere. Scelta una possibilità, si perdono le altre, un po' come nella vita. È il paradosso di Kierkegaard che ritorna dall'etica alla logica: *Se sei libero, scegli*. La scelta fatta va bene per sempre. Tutte le altre possibilità di scelta sono cestinate. Non si possono più prendere in considerazione, a meno che non si ripresentino per altre vie. Kierkegaard esamina quest'eventualità, per arrivare a negarla in modo debole, nello stupendo saggio intitolato *La ripresa*. In effetti, nel caso logico la falsità della negazione si ripresenta attraverso la verità della doppia negazione, $\mathbf{V}\neg\neg p$, che le manipolazioni intuizioniste conservano.

Esercizio 2. Indicare una tesi classica nella cui dimostrazione compaia $\mathbf{V}\neg\neg p$.

In conclusione, un po' sorprendentemente si scrive:

Dimostrazione classica di TE	Dimostrazione intuizionista di TE
$(p \vee \neg p)$	$(p \vee \neg p)$
$\mathbf{F}(p \vee \neg p)$	$\mathbf{F}(p \vee \neg p)$
$\mathbf{F}p$, $\mathbf{F}\neg p$	$\mathbf{F}p$, $\mathbf{F}\neg p$
$\mathbf{F}p$, $\mathbf{V}p$	$\mathbf{V}p$

Il risultato è che in logica classica il TE è un teorema, ma nell'intuizionista no. Infatti, nella prima la permanenza del falso porta a una contraddizione, quindi alla dimostrazione del teorema, ma nella seconda la cancellazione del falso dissolve la possibilità di contraddizione con $\mathbf{V}p$, appena guadagnato, e fa fallire il tentativo di dimostrare il teorema. Il TE non è una legge logica dell'intuizionismo. Il TE – fate attenzione! – non è negato, ché la sua negazione sarebbe una contraddizione, ma sospeso. Mi aspetto che in certi casi, anche se non in tutti, il TE valga ancora. In seguito, rivisitando il procedimento cartesiano del dubbio, mostrerò in quali casi vale. D'altra parte, il metateorema di sospensione di TE è per ora solo potenziale. Constato che io non so dimostrarlo intuizionisticamente. Non è detto che qualcuno più bravo di me ci riesca. Sarò definitivamente sicuro che TE non è un teorema quando avrò costruito effettivamente un suo contromodello. Ma per fare questo devo aspettare di conoscere la semantica intuizionista. Per ora mi limito a segnalare il risultato mettendo deponenti diversi sotto al segno di Frege o alla sua negazione: la C per dire che ho lavorato in modo classico, la I per dire che ho lavorato – invano – in modo intuizionista.

Dimostrazione classica di TE	Dimostrazione intuizionista di TE
$\vdash_{\mathrm{C}} (p \vee \neg p)$	$\dashv_{\mathrm{I}} (p \vee \neg p)$
$\mathbf{F}(p \vee \neg p)$	$\mathbf{F}(p \vee \neg p)$
$\mathbf{F}p$, $\mathbf{F}\neg p$	$\mathbf{F}p$, $\mathbf{F}\neg p$

Fp, **V**p	**V**p

Prima di procedere registro un fatto interessante che non rende inutile il lavoro apparentemente vano di dimostrare il TE. La logica intuizionista si annuncia assolutamente consistente, perché almeno una fbf, proprio TE, non sarebbe un teorema.

Avanti con l'indebolimento

Ma l'intuizionismo non si limita a sospendere il TE, come si sente dire in giro talvolta. Indebolire la regola di falsificazione della negazione non basta. Essa intacca, sì, la forza del binarismo sospendendo la legge del TE, ma non impedisce di dedurre leggi improprie come l'alternativa delle implicazioni $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$. Devo pertanto agire sulla falsificazione dell'implicazione e imporre, come nella negazione, una restrizione. La falsificazione dell'implicazione si trascrive ancora come nel caso classico, ossia verità dell'antecedente e falsità del conseguente, ma *a patto* di cancellare contestualmente tutte le altre falsità che accompagnano l'implicazione da falsificare. Effettivamente il trucco funziona. Provo a falsificare $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$. Da $\mathbf{F}((p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p))$ ottengo due fbf false: $\mathbf{F}(p \Rightarrow q)$, $\mathbf{F}(q \Rightarrow p)$. A questo punto, qualunque delle due implicazioni decida di falsificare, perdo l'altra e con essa la possibilità di dimostrare il teorema. Infatti, se falsifico la prima implicazione e cancello la seconda, ottengo **V**p, **F**q, che non ha l'aria di una contraddizione. (Analogamente se falsifico la seconda implicazione e cancello la prima). Se, invece, mentre falsifico la prima, non cancello l'altra implicazione, ottengo: **V**p, **F**q, $\mathbf{F}(q \Rightarrow p)$. Falsificando la seconda implicazione, ottengo la contraddizione: **V**p, **F**q, **V**q, **F**p, che dimostra il teorema improprio classico. Poco fa parlavo di epistemologia correttiva. Questo è un caso in cui la logica debole intuizionista corregge la logica forte classica. A volte è bene imparare dai meno forti di noi.

Le due mosse restrittive sul falso indeboliscono la logica proposizionale senza quantificatori. Devo proseguire e indebolire la logica predicativa con quantificatori? Direi che conviene. Non solo perché fatto trenta si può fare trentuno, ma per le stesse ragioni esposte a proposito dei connettivi che, in logica classica, da quattro diventano due. La logica classica opera apparentemente con due quantificatori. In realtà, il quantificatore è uno solo, data l'interdefinibilità dei due operatori attraverso la doppia negazione. Devo intervenire sulla falsificazione dei quantificatori. Quale indebolisco: l'operatore universale o l'esistenziale?

Qui la risposta è meno immediata. Conservare la forza dell'universale sicuramente piacerebbe al filosofo metafisico, abituato a teorizzare al livello di massima astrazione. Lo psicanalista, invece, se è freudiano, preferirebbe lasciare intatta la forza dell'operatore esistenziale, che gli serve a individuare i casi particolari su cui lavorare. Un po' di ideologia a questo punto deve venirci in soccorso. Secondo l'ideologia intuizionista di Brouwer la dimostrazione di esistenza deve essere costruttiva, cioè deve esibire un esemplare che goda della proprietà in questione affinché dia la certezza dell'esistenza dell'oggetto. L'intuizionista è cartesiano nel momento in cui privilegia considerazioni di certezza locale, quindi di sapere, su considerazioni di verità globale. Per gli intuizionisti, Freud e Lacan compresi, non basta negare la totalità per affermare l'esistenza. In altri termini, l'intuizionista non ammette come teorema la fbf$\neg \forall x.\neg p(x) \Rightarrow \exists x.p(x)$. Nel mio approccio realizzo i *desiderata* intuizionisti, mantenendo la regola di verifica dell'esistenza e indebolendo la regola di falsificazione dell'universale, esattamente come ho indebolito le regole di falsificazione della negazione e dell'implicazione. Provare per credere. Falsifico $\neg\forall x.\neg p(x) \Rightarrow \exists x.p(x)$. Da $\mathbf{F}(\neg\forall x.\neg p(x) \Rightarrow \exists x.p(x))$ deduco $\mathbf{V}\neg\forall x.\neg p(x)$, $\mathbf{F}\exists x.p(x)$. Riducendo la verità della negazione alla falsità dell'affermazione, ottengo: $\mathbf{F}\forall x.\neg p(x)$, $\mathbf{F}\exists x.p(x)$. A questo punto, riducendo la falsificazione dell'universale e *contemporaneamente* eliminando la falsità dell'esistenziale, ottengo, $\mathbf{F}\neg p(a)$ e finalmente $\mathbf{V}p(a)$ che non è una contraddizione, ma la verità del particolare individuo a.

Il passaggio dovrebbe far riflettere il metapsicologo, se è freudiano. Sto trattando – indebolendo – la negazione insieme all'universalizzazione. È un caso che entrambe siano già deboli in metapsicologia? Freud indebolì la negazione, affermando che il simbolo della negazione non sempre nega, ma talvolta serve a veicolare il contenuto del rimosso nel suo viaggio di ritorno verso la coscienza. Lacan indebolì l'universale con la sua teoria del *non tutto* per esprimere la portata della femminilità, intesa come ciò che eccede l'universalità del concetto. La correlazione tra negazione e universalizzazione risulterà più chiara in semantica, quando, per dare un modello della negazione di α, occorrerà *costruirlo* in modo tale che *tutti* gli s.e. a valle di quello in cui enuncio $\neg\alpha$ *non* affermino α, cioè non forzino α a essere vera. In questa logica vale il principio dell'*a posteriori* o del *nachträglich*. La verità non si può dire tutta subito, come si pretende nei tribunali, ma bisogna rispettare il corso del tempo, ossia del processo. In particolare, il rispetto del tempo del sapere è richiesto dal processo analitico. In ogni caso il concetto di esistenza come costruzione concreta, non data *a priori,* ma realizzata poco per volta nel tempo, è fondamentale sia in Brouwer sia in Freud.

Credo che l'indebolimento dell'universale risponda alla logica freudiana delle *Costruzioni in analisi*, dove l'esistenza – per esempio del fantasma – non viene dimostrata negando la generalità delle alternative contrarie, ma esibendo un suo modello concreto, da cui derivare altri modelli. Ricordo che il criterio freudiano di verità non è l'aristotelico adeguamento all'ideale o alla realtà – non fa differenza, perché la realtà è l'ideale imposto dal padrone – ma è la fecondità. Una tesi è vera se produce altre verità, secondo una sorta di *modus supponens*. Che non è un principio di logica aletica, ma epistemica. Prima supponi il vero, poi, se produce altre verità, lo ammetti vero per dimostrare altre verità. Insomma, è l'esatto duale della dimostrazione per assurdo. Il *modus supponens*, che non è una tautologia ma un principio morale, ha tra i suoi ingredienti più sicuri la concezione dell'esistenza come costruzione.

Prima della costruzione del modello del fantasma, l'analisi non può considerarsi conclusa. Prima del momento costruttivo l'analisi esplora il campo delle metafore preliminari, Freud le chiama interpretazioni, che forniscono il materiale – gli s.e. – che confluirà nella costruzione del modello fantasmatico. Eventualmente la costruzione continuerà costruendo la classe di modelli equivalenti, in cui quel particolare modello si inserisce. Ma questo lavoro è già "specialistico". Si richiede solo a chi si autorizza come analista. Al paziente basta raggiungere la prima fase per iniziare la convalescenza dalla propria nevrosi.

Bilancio

L'operazione di indebolimento binario, che ho presentato nella versione di Melvin Chris Fitting (cfr. il suo *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing*, North Holland, Amsterdam 1969), si ricapitola nella tabella sintattica seguente:

	V	**F**
(*non*) ¬:	$\dfrac{\{S,\ \mathbf{V}\neg\alpha\}}{\{S,\ \mathbf{F}\alpha\}}$;	$\dfrac{\{S,\ \mathbf{F}\neg\alpha\}}{\{S_{\mathrm{V}},\ \mathbf{V}\alpha\}}$;
(*et*) ∧:	$\dfrac{\{S,\ \mathbf{V}(\alpha \wedge \beta)\}}{\{S,\ \mathbf{V}\alpha,\ \mathbf{V}\beta\}}$;	$\dfrac{\{S,\ \mathbf{F}(\alpha \wedge \beta)\}}{\{S,\ \mathbf{F}\alpha\},\ \{S,\ \mathbf{F}\beta\}}$
(*vel*) ∨:	$\dfrac{\{S,\ \mathbf{V}(\alpha \vee \beta)\}}{\{S,\ \mathbf{V}\alpha\},\ \{S,\ \mathbf{V}\beta\}}$;	$\dfrac{\{S,\ \mathbf{F}(\alpha \vee \beta)\}}{\{S,\ \mathbf{F}\alpha,\ \mathbf{F}\beta\}}$
(*seq*) ⇒:	$\dfrac{\{S,\ \mathbf{V}(\alpha \Rightarrow \beta)\}}{\{S,\ \mathbf{F}\alpha\},\ \{S,\ \mathbf{V}\beta\}}$;	$\dfrac{\{S,\ \mathbf{F}(\alpha \Rightarrow \beta)\}}{\{\ S_{\mathrm{V}},\ \mathbf{V}\alpha,\ \mathbf{F}\beta\}}$
(*Ex*) ∃:	$\dfrac{\{S,\ \mathbf{V}\exists x.\alpha(x)\}}{\{S,\ \mathbf{V}\alpha(a)\}\ (a \text{ nuovo})}$;	$\dfrac{\{S,\ \mathbf{F}\exists x.\alpha(x)\}}{\{S,\ \mathbf{F}\alpha(a)\}}$
(*Omn*) ∀:	$\dfrac{\{S,\ \mathbf{V}\forall x.\alpha(x)\}}{\{S,\ \mathbf{V}\alpha(a)\}}$;	$\dfrac{\{S,\ \mathbf{F}\forall x.\alpha(x)\}}{\{\ S_{\mathrm{V}},\ \mathbf{F}\alpha(a)\}\ (a \text{ nuovo})}$

ESERCIZIO 3. (Divertente). Che “logica” si otterrebbe spostando nella prima colonna tutte le ricorrenze di S_{V}?

Cos’ha di diverso questa tabella da quella data nel primo seminario, su cui ci siamo esercitati a dimostrare alcune tesi notevoli? Non poco. In ben il 50% delle regole di falsificazione compare un S_{V} al posto di S. Cosa significa? S_{V} è l’insieme delle formule marcate vere, che vengono trascritte tali e quali quando si falsifica rispettivamente una negazione, un’implicazione e un’universalizzazione. In formule, $S_{\mathrm{V}} = \{\mathbf{V}\alpha \mid \alpha \in S\}$. S_{V} è l’insieme delle formule che darwinianamente sopravvivono alla selezione operata dalla falsificazione, cioè vengono trascritte al passo successivo della dimostrazione. Non vengono cancellate, perché non sono false. S_{V} incarna in termini estensionali la legge di monotonia (o permanenza o conservazione o persistenza) del vero. Intuitivamente la regola dice: “Di tutte le formule che avevi in S metti in S_{V} solo le vere e butta via le false”. Il Vangelo direbbe: setaccia il grano vero separandolo dal loglio falso. “Solo allora puoi trasformare la falsità della negazione in verità dell’affermazione”. Dal punto di vista estensionale, cioè insiemistico, la diversità tra logica classica e logica intuizionista si riduce alla differenza di estensione tra due insiemi, S e S_{V}: la prima conserva intatto (S), la seconda seleziona da S solo ciò che è vero (S_{V}), quando si vogliono falsificare negazioni, implicazioni e generalizzazioni.

(Se avessimo sviluppato l’aspetto sintattico della logica proposizionale alla maniera del calcolo dei sequenti di Gentzen, avremmo trovato una restrizione analoga ma non identica. Infatti, nel calcolo intuizionista dei sequenti, a sinistra del segno di

Frege si possono porre quante premesse si vogliono, ma si restringono le possibilità a destra, perché si ammette una sola conclusione. *Il va sans dire* che tale calcolo è equivalente a quello di Beth).

Tento ora un primo bilancio dell'operazione. Poiché S_V è un sottoinsieme di S, ossia $S_V \subset S$, l'operazione sembra riduttiva. La riduzione ha portato alla perdita di certi teoremi. In realtà la riduzione è voluta. Siccome il falso è ora un sapere, ma un sapere inadeguato, cioè non consolidato, come quello del vero, in una dimostrazione accettabile, si vuole ragionevolmente dedurre meno dal falso che dal vero. L'effetto è la perdita di alcune tesi: TE, la versione forte delle leggi di doppia negazione, di de Morgan, di Filone e delle contrapositive, della *consequentia mirabilis*, che ora vale solo indebolita in versione negativa: $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$.

ESERCIZIO 4. Dimostrare la *consequentia mirabilis* debole, ma non meno mirabile.

Ma la perdita è più apparente che reale, anzi in un certo senso è un guadagno. Spiego in che senso. In primo luogo, si guadagna in certezza dimostrativa, deducendosi meno dal sapere inadeguato, cioè dal falso. Le dimostrazioni intuizioniste, in effetti, sono più sicure delle classiche perché dipendono da vincoli meno forti, da presupposti più deboli. In secondo luogo, come conseguenza del teorema di Kolmogorov, che vedremo tra poco, Gödel ha dimostrato che le tautologie classiche formulate solo con congiunzioni e negazioni sono tesi intuizioniste. "Il che conferma che la logica intuizionista è un'estensione della logica classica, quando questa venga intesa come si deve intendere: cioè come la logica della negazione e della congiunzione" (P. Odifreddi, *Il diavolo in cattedra. La logica da Aristotele a Gödel*, Einaudi, Torino 2003, p. 111. A cui rimando per l'illustrazione del calcolo dei sequenti di Gentzen). E aggiunge subito dopo Odifreddi: "Il risultato *non* vale se la si considera invece come la logica della negazione e della disgiunzione [alternativa], come dimostra il fallimento del principio del TE. E non vale neppure se la si considera come la logica della negazione e dell'implicazione, come dimostra il fallimento della *consequentia mirabilis*" [forte, $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$]. Personalmente, arrischierei un metateorema leggermente più forte di quello di Odifreddi. Tutta logica classica si può scrivere con due soli connettivi: congiunzione e negazione. La logica intuizionista dimostra i teoremi della logica classica che si possono scrivere con congiunzione e negazione. *Ergo* la logica intuizionista è un'estensione della classica: dimostra i teoremi della classica e eventualmente qualcosa in più. È più generale, come giustamente ci si attendeva dall'indebolimento dei presupposti.

A questo punto voglio mostrare il guadagno effettivo, non solo potenziale, dell'indebolimento. In particolare voglio dimostrare che si tratta di un guadagno metalogico, o intensionale, come forse preferirebbe dire Carta, perché offre la possibilità di interpretare in un modo non estensionale i buchi introdotti nella logica classica dall'indebolimento della simmetria tra vero e falso.

Il guadagno epistemico

La mia trovata, che mi vergogno un po' a considerare originale, consiste nell'interpretare – ecco che fa capolino l'aspetto intensionale – le tesi classiche non intuizioniste (CNI), cioè le tesi α del tipo $\vdash_C \alpha$ e $\dashv_I \alpha$, come potenziali candidati per definire operatori epistemici. Intendo per operatori epistemici CNI funzioni delle fbf, del tipo CNIp, che veicolano il senso: "Q sa che quel la fbf p esprime è vero", dove Q indica un soggetto generico o *qualunque*, eventualmente anche l'Altro in senso lacaniano. Considero per esempio il principio TE. Scrivo TEp o più semplicemente Tp per indicare che il soggetto Q sa qualcosa di p, in particolare, come vuole il terzo escluso, Q sa se è vera p o è vera *non p*, cioè sa se p è vera o falsa. (In termini strettamente matematici gli operatori epistemici sono endomorfismi, cioè funzioni che applicano l'insieme delle fbf su un suo particolare sottoinsieme. Nel nostro caso l'insieme privilegiato è formato dalle tesi classiche non intuizioniste. Il problema generale è stabilire le proprietà della concatenazione di endomorfismi. Ma non affronterò qui questa generalizzazione che ci porterebbe a considerazioni di tipo algebrico per noi troppo astratte).

La proposta, benché possa sembrare peregrina ad alcuni, è *a priori* legittima. Non introduce nessuna contraddizione nel sistema perché CNI, non è un nuovo assioma che introduca nel sistema nuovi vincoli, eventualmente conflittuali con altri. Introduce solo un'equivalenza definitoria, in pratica una stenografia:

CNIp sse p si scrive come CNI,

per esempio scrivo:

Tp sse$(p \vee \neg p)$.

(In realtà, potrei definire in generale infiniti operatori epistemici del tipo

$T_\alpha p$ sse $(p \vee \neg p \vee \alpha)$.

Concretamente, in quale senso intuitivo posso considerare T un operatore epistemico? Non ne do alcuna definizione esplicita. Non formulo assiomi che riguardino il suo essere epistemico, tanto meno ne do neppure una definizione implicita. Con che diritto lo considero un operatore epistemico? Intuitivamente, T contiene un sapere perché l'estensione di Tp coincide con l'estensione della verità di p o di *non p*, cioè con l'essere p vera o p falsa. Cos'altro c'è da sapere su p? Ma una volta tanto il mio modo di procedere si fa meno estensionale. Il mio giudizio di epistemicità è rimandato *a posteriori*. Se i teoremi che riguardano T hanno un'"aria" epistemica, considero T un operatore epistemico. Già, ma quali parametri di riferimento uso per giudicare l'aria epistemica di T? Semplice. Se i risultati sono "freudiani", allora considero l'operatore sotto test un operatore epistemico.

Osservazioni sul metodo

A molti di voi l'argomento sembrerà o vuoto o circolare. Sia come sia, testimonia fedelmente il mio stile di lavoro, che non è intellettualistico. Non speculo in astratto su una teoria, giudico se è coerente e poi l'applico in pratica. Non vado alla ricerca di una teoria da applicare alla pratica come canone corretto o norma deontologica stabilita come ortodossa. Come ho già detto, non sono un buon maestro, quindi neppure un bravo scolaro. E neppure procedo induttivamente inferendo la teoria giusta dalla pratica. Sull'induzione, se non è matematica, nutro tutti i dubbi e tutte le perplessità che nutriva Hume nei confronti dell'empirismo dei suoi compatrioti. La mia pratica teorica non separa in modo intellettualistico il momento teorico da quello pratico. I due momenti sono per me strettamente sovrapposti. Quando lavoro in pratica (in clinica, si usa dire, ma il termine troppo medico non mi garba), lavoro con il mio inconscio, interpretando e ricostruendo le storie dei miei pazienti, così come ho imparato a fare interpretando e ricostruendo la mia. Quando lavoro in teoria, con questa esperienza alle spalle vado a rovistare nell'inconscio collettivo – pleonasmo questo, l'inconscio è privato *e* collettivo –, salgo nella soffitta o scendo nella cantina, dove stanno a impolverarsi o ad ammuffire i depositi epistemici della mia cultura, e verifico se altri ha fatto la mia stessa esperienza o un'esperienza analoga alla mia, muovendo magari da presupposti diversi dai miei. Insomma, anche facendo teoria lavoro sull'inconscio della gente con il mio. Fu così che, più di quindici anni fa, grufolando come un maiale da tartufi nella tradizione logica occidentale, riscontrai delle affinità tra la pratica intuizionista e la mia. Perciò decisi di approfondire la questione e verificare, in un contesto di giustificazione, se certe coincidenze di formulazioni riscontrate in contesto di ricerca tra l'intuizionismo di Brouwer e la metapsicologia di Freud, magari riformulata alla Lacan, fossero casuali o sistematiche. Quel che mi ha affascinato è stato constatare che in vecchie formulazione teoriche si celassero contenuti freudiani, di cui nessuno sospettava l'esistenza, neppure gli autori di quelle teorie. Vuol forse dire che il freudismo precede Freud? Che la psicanalisi doveva emergere anche senza Freud, perché era già lì, senza che nessuno lo sapesse? Anche la psicanalisi può essere inconscia? Può solo essere riscoperta ogni volta che la si fa, in teoria o in pratica? Ipotesi intriganti, che formulo per aprire un dibattito. Naturalmente, senza togliere nulla a Freud. Suo resterebbe il merito di aver fiutato la temperie culturale e aver fissato idee portate dal vento del tempo.

Voi stessi siete chiamati a esercitare il vostro giudizio in merito al mio lavoro di ritrovamento di Freud al di là di Freud. Cominciate, per esempio, da questo esempio, che considero un po' come il caso paradigmatico di tutto il mio lavoro. Dovrebbe essere chiaro a chi si è chiesto con impazienza quando avrei cominciato a esporre l'epistemologia dell'inconscio freudiano che in fondo finora non ho fatto altro che parlare di Freud, fingendo di parlare di Aristotele *and company*, e ritrovando il discorso freudiano implicito in tanti altri discorsi non espressamente freudiani. Una di questi contenuti freudiani prefreudiani, che considero paradigmatico, è il seguente teorema:

Non si può non sapere

Come quelli che seguono, che sono tutti teoremi più o meno noti, anche questo è un teorema ben noto, avendo addirittura un patronimico. È, infatti, un caso particolare del teorema di Kolmogorov, il quale nel 1925 scoprì che la doppia negazione di una tesi classica [senza quantificatori universali] è una tesi intuizionista, cioè dimostrabile in logica intuizionista. In altri termini si passa dall'ambito classico all'intuizionista doppionegando. Il teorema sarebbe piaciuto a Hegel che nella doppia negazione intravedeva l'espressione dell'infinito qualitativo. Nella mia notazione che è molto compatta (il risparmio di inchiostro è evidente), per non dire elegante, formulo il lemma di Kolmogorov così:

$$\vdash_{\mathrm{I}} \neg\neg \mathrm{T}p.$$

Esplicitamente questa scrittura sta per:

$$\vdash_{\mathrm{I}} \neg\neg(p \vee \neg p),$$

avendo appena deciso di sostituire con l'operatore T la legge del terzo escluso ogni volta che compaia. Scrivo $\mathrm{T}p$, cioè, per indicare l'applicazione della legge del terzo escluso alla variabile preposizionale p. Addirittura, per dare maggiore sostanza alla scrittura, posso definire le regole di riscrittura dell'operatore T come ho fatto per gli altri operatori logici:

$$\begin{array}{lcc} & \mathbf{V} & \mathbf{F} \\ \mathrm{T}: & \dfrac{\{S,\ \mathbf{V}\mathrm{T}\alpha\}}{\{S,\ \mathbf{V}\alpha\},\{S,\ \mathbf{V}\alpha\}}; & \dfrac{\{S,\ \mathbf{F}\mathrm{T}\alpha\}}{\{S,\ \mathbf{F}\alpha,\ \mathbf{F}\neg\alpha\}} \end{array}$$

Dovrebbe essere autoevidente – ma non si sa mai, è meglio che facciate la dimostrazione per esercizio – che la tabella rispetta l'equivalenza definitoria di T:

$$\vdash_{\mathrm{I}} \mathrm{T}p \Leftrightarrow p \vee \neg p.$$

L'equivalenza dimostra la funzione puramente ausiliaria della tabella, la quale non aggiunge nulla di nuovo a quella di Beth. Vi chiederete che senso abbia costruire regole scontate per dimostrare teoremi noti. Vi rispondo dimostrando intuizionisticamente in poche battute il lemma di Kolmogorov, da cui deriva il teorema generale.

Sotto il sole niente di nuovo. L'alba della dimostrazione è sempre la falsificazione.

$\mathbf{F}\neg\neg\mathrm{T}p$.

Anche tutte le altre regole di riscrittura funzionano come prima. Perciò scrivo:

$\mathbf{V}\neg\mathrm{T}p$.

L'unico punto delicato della dimostrazione è il seguente. La regola mi dice di trasformare $\mathbf{V}\neg\mathrm{T}p$ in $\mathbf{F}\mathrm{T}p$. Ma se mi limito a fare questo perdo la possibilità di incontrare una contraddizione, quindi di dimostrare il teorema. Infatti, al passo successivo, sviluppando $\mathbf{F}\mathrm{T}p$, otterrei $\mathbf{F}p$, $\mathbf{F}\neg p$ da cui, procedendo in modo intuizionista, non posso ricavare una contraddizione per via della restrizione S_{V}. Il trucco è conservare $\mathbf{V}\neg\mathrm{T}p$ nel momento in cui lo si trasforma in $\mathbf{F}\mathrm{T}p$:

$\mathbf{V}\neg\mathrm{T}p$, $\mathbf{F}\mathrm{T}p$,

cosa sempre possibile anche in regime S_{V}. Questo valga come raccomandazione generale: non precipitarsi a disfarsi di $\mathbf{V}\neg\alpha$. Sono riserve protette di $\mathbf{F}\alpha$, che resistono alle purghe di $\mathbf{F}\alpha$ ordinate da S_{V}, quindi sono fonti di preziose contraddizioni che servono a dimostrare il teorema. Per esempio la dimostrazione della legge debole delle contrapositive, data nel seminario precedente, non è intuizionista, perché non regge al falcidiamento delle $\mathbf{F}\alpha$ imposto da S_{V}. Si può aggirare la decimazione di fbf prodotta da S_{V} solo sfruttando la legge di monotonia del vero – il vero si conserva perché si ripete identicamente, come se fosse soggetto alla freudiana coazione a ripetere – la quale permette di non cancellare potenziali falsi come $\mathbf{V}\neg p$.

ESERCIZIO 5. Dimostrare intuizionisticamente la legge debole delle contrapositive.

A questo punto il gioco è fatto. Seguendo la raccomandazione, non trascrivo $\mathbf{V}\neg\mathrm{T}p$ ma $\mathbf{F}\mathrm{T}p$, come vuole la nuova tabella:

$\mathbf{V}\neg\mathrm{T}p$, $\mathbf{F}p$, $\mathbf{F}\neg p$.

Ora sono più tranquillo, perché il vero si conserva, anche se $\mathbf{V}\neg\mathrm{T}p$ è un falso mascherato da vero. Applico la regola intuizionista della falsità della negazione a $\mathbf{F}\neg p$ e, pagando il piccolo tributo di cancellare il falso $\mathbf{F}p$, ottengo:

$\mathbf{V}\neg\mathrm{T}p$, $\mathbf{V}p$;

Poi procedo meccanicamente, dedicandomi alla verità della negazione, $\mathbf{V}\neg\mathrm{T}p$, che dà la falsità dell'affermazione:

$\mathbf{F}\mathrm{T}p$, $\mathbf{V}p$,

e concludo trascrivendo $\mathbf{F}\mathrm{T}p$ in base alla regola ausiliaria sopradefinita, che porge l'attesa contraddizione:

$\mathbf{F}p$, $\mathbf{F}\neg p$, $\mathbf{V}p$

e il CVD, come volevasi dimostrare. (Il piccolo problema della scrittura matematica è di segnalare dove finiscono le considerazioni "artificiali"della matematica e cominciano quelle "naturali"della vita quotidiana. Le sigle CVD o l'antico QED, *quod erat demonstrandum,* assolvono a questa funzione redazionale).

Questo punto rimane acquisito dalla logica classica: la contraddizione falsifica la falsificazione e dimostra il teorema. Dopo tanto affaticarci intorno all'indebolimento non bisogna dimenticare che i teoremi che valgono nel sistema debole, valgono anche in quello forte. Le leggi deboli incontrate valgono anche in logica classica forte. Se non fosse così, se non valesse una legge di conservazione a ritroso dei teoremi, non avrei intrapreso l'indebolimento. L'indebolimento ha senso solo se produce la generalizzazione. Tutto ciò che dimostro intuizionisticamente devo poterlo dimostrare anche classicamente, come effettivamente si verifica.

*Precisazione richiesta dal prof. Carta sulla natura della generalizzazione, che va in estensione piuttosto che in intensione, in quantità piuttosto che in qualità. (*Warning*! Fare attenzione al luogo comune che l'estensione rimanga in superficie, mentre l'intensione si spinga in profondità). I teoremi intuizionisti non sono concettualmente diversi da quelli classici. Hanno solo portata quantitativamente più ampia. In matematica estensione e restrizione si intendono in senso insiemistico. Se una funzione coincide con un'altra in insiemi di argomenti e di valori meno ampi, si dice la prima è una restrizione della seconda e che la seconda è un'estensione della prima. Il risultato dell'estensione intuizionista si valuta in termini cartesiani, ossia di certezza, non di verità. Una dimostrazione intuizionista non è meno vera di una classica, ma è più convincente, perché si basa su un minor numero di vincoli (o presupposti o restrizioni). Anche qui* convincente *va inteso in estensione nel senso che convince più gente. Il lemma di Kolmogorov, dimostrato intuizionisticamente, è estensionalmente più accettabile del TE, dimostrato classicamente. Dico che il mio* *risultato è più generale e più sicuro. Perché? Perché la dimostrazione intuizionista è meno presuntuosa della classica. Presume, infatti, una sola legge di monotonia invece di due. Risultato collaterale: con la dimostrazione intuizionista mi sento più tranquillo. Troverò meno gente che me la contesta, perché è dimostrata con mezzi poveri che hanno tutti. Sarò anche più sicuro di dire meno sciocchezze che in contesto classico, visto che in contesto debole non derivo teoremi impropri come l'alternativa delle implicazioni.*

È chiaro, tuttavia, che le preferenze intellettuali di Carta vadano all'intensionalità, di Sciacchitano all'estensionalità.

Ottengo, così, nel calcolo intuizionista una variante del TE, la sua doppia negazione, che a maggior ragione vale in logica classica. Devo riconoscere che tale calcolo non ce l'ha paranoicamente con il TE. Lo ammette, ma solo a certe condizioni, per esempio a patto di doppionegarlo.

Unum scio nihil scire

L'impossibilità di non sapere, secondo la nostra reinterpretazione del teorema di Kolmogorov è ancora un contenitore vuoto. Che cosa non si può non sapere? La risposta è nota dai tempi di Socrate: noi non possiamo non sapere che sappiamo di non sapere. In formule

$$\vdash_{\mathrm{I}} \mathrm{T}\neg\mathrm{T}p,$$

che lascio dimostrare per esercizio.

La sorpresa freudiana

Come vedete – ma forse non sarete sorpresi come me ben diciassette anni fa, perché non siete freudiani cocciuti quanto me – basta incrinare la specularità tra vero e falso, destituendo la legge di monotonia del falso, per ottenere teoremi che hanno una chiara connotazione epistemica, *prima facie* freudiana. Questa piccola scoperta ha per me il valore che ebbe per Lacan la fase dello specchio. Lacan rapinò la sua a Henri Wallon, io la mia a Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Se fossi vanitoso la chiamerei per i posteri la fase dell'indebolimento speculare.

Eppure, basta leggere il lemma di Kolmogorov, $\neg\neg\mathrm{T}p$, con una leggera forzatura metalogica, per ottenere il principio base della metapsicologia freudiana: *non si può* (prima negazione) *non* (seconda negazione) *sapere* (operatore epistemico basato su TE) che Stamattina Fulvio mi chiedeva quando avremmo messo sotto i denti un po' di carne. Ecco servito un bel pezzo di polpa freudiana.

Gavazzeni interviene a precisare che il contromodello probabilistico dell'alternativa delle implicazioni fa intervenire il tempo del lancio della moneta, tempo che non è esplicitato nella formula paradossale. Il riferimento temporale verrà discusso più avanti, come specifica differenza tra le due logiche, quella classica priva di riferimenti temporali, quella intuizionista dotata di riferimenti al tempo del sapere.

La mia proposta di considerare le leggi classiche non intuizioniste (CNI), per esempio il TE, come matrici di operatori epistemici riceve proprio da Freud una prima conferma di sensatezza. L'operatore epistemico T, derivato dal TE, attribuisce retroattivamente alla doppia negazione un contenuto di sapere, che Freud ci ha insegnato a riconoscere come sapere inconscio. La lettura freudiana del lemma di Kolmogorov è di una strabiliante evidenza freudiana: al di là dell'ignoranza contingente del soggetto, che non è conscio di quel che sa, l'impossibilità di non sapere pone in essere – ma è un essere debole – il vero sapere soggettivo, che è inconscio. Se mi volessi togliere lo sfizio di inventare definizioni, direi che il lemma di Kolmogorov "fonda" il nichilismo epistemico, nel senso che pone il non sapere come impossibile, anche quando il soggetto non lo sa effettivamente ancora. (Tenete a mente questi continui riferimenti temporali al sapere). Nell'inconscio c'è comunque un sapere, che prima o poi tra le maglie della logica, forte o debole che sia, raggiunge la coscienza. Allora l'Io avrà preso il posto dell'Es, come poeticamente si esprime Freud. Molto semplicemente, l'inconscio – dice il teorema debole – non può non sapere.

Risa al riferimento di " lei non poteva non sapere"… che lui la tradiva con la sua migliore amica.

Il teorema debole, ovviamente, vale anche in logica forte. Voi vi siete chiesti cosa serve indebolire, se si ottengono teoremi che valgono anche in logica forte. Su una prima risposta mi sono già dilungato. Il teorema debole vale in logica forte *e* in altre logiche, per esempio più deboli, quindi è più generale. La seconda risposta sta cominciando a configurarsi ora. La logica debole permette di interpretare – metalogicamente – i teoremi forti come teoremi con un valore epistemico. Il lemma di Kolmogorov si interpreta in logica debole come un lemma del sapere inconscio.

Kolmogorov sulla coerenza

D'altra parte, il lemma di Kolmogorov ha un suo preciso contenuto epistemico, indipendente dalla lettura freudiana. Serve, infatti, a dimostrare il metateorema di Kolmogorov, di cui do una prova schematica mista alla Beth e alla Frege nel caso più semplice.

Se α è una tesi classica che contiene una sola variabile proposizionale p, allora si può dimostrare intuizionisticamente

$$\vdash_{I} \mathrm{T}p \Rightarrow \alpha.$$

Infatti,

$$\mathbf{F}(\mathrm{T}p \Rightarrow \alpha)$$

Si sviluppa come al solito

$$\mathbf{V}\mathrm{T}p, \mathbf{F}\alpha.$$

In base alla tabella ausiliaria per T, $\mathbf{V}\mathrm{T}p$ dà origine a due rami dimostrativi:

$$\{\mathbf{V}p, \mathbf{F}\alpha\}, \{\mathbf{V}\neg p, \mathbf{F}\alpha\}.$$

Poiché α contiene solo p ed è una tesi classica, la sua falsificazione deve portare a una contraddizione del tipo $\mathbf{F}p$ (magari da $\mathbf{V}\neg p$) e $\mathbf{F}\neg p$ (magari da $\mathbf{V}\neg\neg p$). L'albero dimostrativo avrà allora una contraddizione in ogni foglia:

$$\{\mathbf{V}p, \mathbf{F}\alpha\}, \{\mathbf{V}\neg p, \mathbf{F}p, \mathbf{F}\neg p\},$$

dimostrando il teorema. Contrapponendo due volte si ha

$$\vdash_{I} \neg\alpha \Rightarrow \neg \mathrm{T}p$$
$$\vdash_{I} \neg\neg \mathrm{T}p \Rightarrow \neg\neg\alpha.$$

Dal lemma si ottiene per *modus ponens*

$$\vdash_{I} \neg\neg\alpha,$$

e, finalmente, il metateorema di Kolmogorov:

se $\vdash_{C} \alpha$, allora $\vdash_{I} \neg\neg\alpha$.

Il viceversa è scontato, essendo ogni teorema intuizionista anche classico.
Il contenuto epistemico del teorema di Kolmogorov riguarda la coerenza di quella parte della matematica che può essere vista dall'angolo visuale intuizionista. La doppia negazione è una marca di non contraddizione, Infatti, se una formula è vera anche la doppionegata lo è; se è falsa anche la doppionegata lo è. Pertanto, ogni formula doppionegata della matematica, dimostrabile intuizionisticamente, rispetta il principio di bivalenza, quindi è non contraddittoria. Il valore di questa affermazione di coerenza parziale sta nel fatto che è dimostrabile con strumenti intuizionisti, più deboli di quelli classici, quindi di portata più generale. Dopo Gödel si sa che con i mezzi ordinari della matematica non si possono produrre dimostrazioni di coerenza di *tutta* la matematica. Gentzen ha dato una dimostrazione forte della coerenza di tutta l'aritmetica, convocando ordinali transfiniti molto grandi, praticamente tutti i possibili ordinamenti degli interi naturali.

Teorema di fondazione

Cosa non si può non sapere? Ovviamente la verità. In formule,

$$\vdash_{I} p \Rightarrow \mathrm{T}p.$$

Alcuni sistemi epistemici, costruiti diversamente da quello da me presentato, cioè costruiti per aggiunzione di nuovi assiomi al calcolo logico classico, prevedono che si sappia il vero, ponendo esplicitamente

1. p è vero,
2. il soggetto S sa che p è vero.

Il primo assioma è problematico perché il predicato verità è potenzialmente contraddittorio. Il sistema intuizionista, essendo debole, può fare a meno di *liaisons dangereuses*, cioè di vincoli in più non richiesti. La verità nell'inconscio parla. Non c’è bisogno di zittirla con assiomi, che magari l’obbligano a dire fesserie. Tali sistemi prevedono anche un terzo assioma:

3. il soggetto S sa giustificare perché sa che *p*.

Il sistema epistemico da me adottato non ha bisogno di giustificazioni *ad hoc*, perché la giustificazione è fornita da tutto il calcolo intuizionista, a cui non si è aggiunto nulla di nuovo. Sostengo che la logica debole sa già e perché quel che c’è da sapere. Non c’è bisogno di sovraccaricarla di ipotesi *ad hoc*, che sono generalmente antiestetiche, quando non siano già poco scientifiche.

Sapere è sapere che non

D’ora in poi gli incroci tra sapere freudiano e sapere accademico saranno sistematici… non meno di prima.

Se non provenissi dall’esperienza freudiana non avrei mai pensato di tentare di dimostrare un teorema come il seguente:

$$\vdash_{I} \mathrm{T}p \Rightarrow \mathrm{T}\neg p,$$

che afferma quanto dice il titolo di questo capitolo. (Da ora in poi sospendo le dimostrazioni dei teoremi oggetto per non interrompere il filo del discorso). Eppure, sapere come funziona la negazione è importante in psicanalisi, perché sta al cuore della metapsicologia. Freud è ambiguo sul punto. Oscilla tra l’affermare che l’inconscio non conosce la contraddizione, con un atteggiamento che sembra orientarlo verso la logica minimale (come si vedrà, quella minimale è una logica che tollera la contraddizione), e la tesi più elaborata che la negazione serva due padroni: da una parte serve a espellere dall’apparato psichico le rappresentazioni sgradevoli, dall’altra serve a riportare alla coscienza il rimosso.

La negazione intuizionista è una nozione ricca di sfumature, ma non tante forse quante servirebbero al freudismo. Leggo nel saggio del 1925 di Freud sulla *Negazione*.

«Lei si chiederà chi può essere la persona del sogno? Non la madre». Rettifichiamo: «Dunque è la madre». Interpretando, ci prendiamo la libertà di prescindere dalla negazione e di cogliere il puro contenuto ideativo. Per noi è come se il paziente dicesse: «A proposito di quella persona mi è davvero venuta in mente mia madre, ma non mi va di ammetterlo».

Ma per Freud non si tratta di cancellare la negazione in modo automatico. Sospendere la negazione è un atto analitico, frutto di un elaborato processo interpretativo *e* di una decisione morale che le cose *devono* stare così e non in un altro modo. Qualcosa della dimensione etica dell’atto di negare si ritrova nella negazione brouweriana, che non è una semplice negazione ma, secondo certe interpretazioni, l’affermazione che è necessario che qualcosa *non* sia necessaria. In termini freudiani, la negazione afferma. Che cosa? che è impossibile che sia possibile il contrario. Nel caso citato, è come se Freud dicesse: “È impossibile che non si tratti della madre”. Evidentemente Freud sapeva qualcosa della negazione, come afferma il suddetto teorema. Il quale, tuttavia, non si può usare per interpretare l’inconscio del paziente, ma per giustificare *a posteriori* l'interpretazione con un *"Se lei sapeva, allora sapeva anche che era impossibile…"*

Oltre Socrate: dal non sapere al sapere

È curioso, ma forse non del tutto inspiegabile, che tutta l'antichità ci abbia tramandato un solo e striminzito teorema epistemico, quello socratico, del sapere di non sapere. Presumo che le cose siano andate così, anche se non è scritto in nessun manuale di storia della filosofia. Socrate fu condannato a morte e il rullo compressore aristotelico, al servizio dell'ideologia dominante – quella del conquistatore Alessandro Magno – fece il resto. La metafisica aristotelica appiattì ogni possibile finezza epistemica soggettiva sotto il suo fondamentalismo ontologico. Per il discorso del servo l'essere deve essere quello che stabilisce il padrone. Il soggetto ontologico deve stare agli ordini, direi al soldo, del padrone. Le reazioni moderne alla dittatura dell'essere sono state le diverse forme di nichilismo. Si va dal nichilismo alla tedesca con Hegel-Nietzsche a quello alla francese di Kojève-Deleuze, variamente dosati nel rapporto distruzione-costruzione, ma tutti ugualmente fissati al problema ontologico, quindi alla lunga inefficaci nel contestare la metafisica aristotelica, che è pesantemente ontologica. Chi tentò una strada alternativa, radicalmente diversa, proponendo una sorta di nichilismo epistemico, fu Freud. Il teorema freudiano dell'inconscio si mostra indifferente al problema ontologico e di dedica alla problematica del divenire. Ma si tratta del divenire del sapere, non dell'essere: se *ora* non sono conscio, allora *nachträglich sarò* conscio. Detto in tedesco: *Wo es war, soll ich werden.*

C'è una formulazione dell'intuizione socratica, che ci tornerà molto utile per affrontare l'argomento freudiano, la quale pone sotto la lente la transizione dal non sapere al sapere. Ci piacerebbe chiamarlo teorema di Cartesio perché rappresenta il superamento definitivo dello scetticismo classico (Pirrone, Sesto Empirico e altri) e la transizione verso la scienza. Con Cartesio il dubbio e l'ignoranza non restano fini a se stessi, ma diventano fecondi. Producono scienza. Questa è la novità del XVII secolo, rimasta latente per millenni. In formule si scrive:

$$\vdash_{\mathrm{I}} \neg \mathrm{T}p \Rightarrow \mathrm{T}p$$

e si legge: se non so, allora so (di non sapere). Data la sua importanza riporto brevemente la dimostrazione senza commenti.

$\mathbf{F}(\neg \mathrm{T}p \Rightarrow \mathrm{T}p)$;
$\mathbf{V}\neg \mathrm{T}p$, $\mathbf{F}\mathrm{T}p$;
$\mathbf{V}\neg \mathrm{T}p$, $\mathbf{F}p$, $\mathbf{F}\neg p$;
$\mathbf{V}\neg \mathrm{T}p$, $\mathbf{V}p$;
$\mathbf{F}\mathrm{T}p$, $\mathbf{V}p$;
$\mathbf{F}p$, $\mathbf{F}\neg p$, $\mathbf{V}\mathrm{p}$.

A me importa segnalarvi questo teorema, perché rappresenta il contesto di non sapere ($\mathrm{T}\neg p$) dove si muove Freud e da cui Freud trae un sapere ($\mathrm{T}p$). Sostengo che la mossa freudiana, che pone come antecedente l'inconscio ($\mathrm{T}\neg p$) e come conseguente il conscio ($\mathrm{T}p$), si inserisca nella strategia cartesiana del dubbio. Nella confortevole *poêle* cartesiana tutto ciò che è dubitabile diventa falso. Ma il falso è un sapere. *Ergo*, il moderno soggetto cartesiano arriva a sapere qualcosa partendo dalla negazione del sapere. Il procedimento freudiano è simmetrico a quello cartesiano: tutto ciò che è dubitabile diventa vero. In analisi funziona un'*epoché* a rovescio. Il giudizio non viene sospeso, ma dato per certo, anche se è dubbio. (Sulla necessità dell'*epoché* anche in analisi cfr. E. Paci, *Il ritorno a Freud*, "aut aut", 98, 1967, p. 63). Nel confortevole studio analitico si sente dire sulle labbra del paziente: "Forse volevo uccidere mio padre?". "Certo", conferma l'analista freudiano. Questo non è molto confortevole, direte. Ora il soggetto è responsabile anche di desideri che non sa (di sapere). Ce n'è abbastanza per resistere alla psicanalisi, costi quel che costi. Magari facendola, per dire di averla fatta e renderla così non avvenuta. Tipicamente gli analisti professionali resistono in questo modo all'analisi e le scuole di psicanalisi celebrano ufficialmente le esequie della psicanalisi vendendo attestati di formazione psicanalitica.

Il filosofo non si lascia sfuggire il carattere etico di questa logica epistemica. Il soggetto nell'ignoranza può scegliere: o rimane nell'ignoranza ($\neg\mathrm{T}p$), applicando il principio di identità

$$\vdash_{\mathrm{I}} \neg\mathrm{T}p \Rightarrow \neg\mathrm{T}p,$$

o transita verso il sapere ($\mathrm{T}p$), applicando la legge cartesiana del dubbio. La transizione non è scontata, ma consegue al giudizio, cioè all'atto della volontà libera. Da ignorante il soggetto può arrivare a sapere. *Tu peux savoir*, *scilicet* ossia *scire licet*, era il motto della *Ecole Freudienne de Paris*, fondata da Lacan, che nella seconda metà del suo insegnamento rivalutò Cartesio, pur essendo partito da Hegel, in versione Kojève. Cartesio è antiintellettualista o meglio metaintellettualista: il giudizio epistemico esula dall'intelletto e si apre all'etica. A ritroso, l'etica conferisce all'epistemica il carattere di soggettività. Infatti, non sapendo e deliberamente assumendo la tua ignoranza, tu arrivi a sapere qualcosa di te, cioè che esisti come soggetto epistemico. La verità guadagnata dal procedimento dubitativo non è oggettiva ma soggettiva, una di quelle che interessano al filosofo postscientifico, per esempio Kierkegaard nella *Postilla non scientifica* alle *Briciole filosofiche*.

Un punto di questa logica etico-epistemica vale la pena segnalare. La scelta morale, se rimanere nell'ignoranza o assumere il sapere, non è coatta. Infatti, in logica intuizionista non vale il teorema improprio dell'alternativa delle implicazioni:

$$\dashv_{\mathrm{I}} (q \Rightarrow \neg p) \vee (q \Rightarrow p).$$

Come dire che esiste la possibilità di non scegliere. La sospensione del terzo escluso apre alla scelta tipicamente ossessiva di non scegliere. È lei la responsabile che trasforma il dubbio in follia (*folie du doute*).

Sapere di sapere è ancora sapere

Come ho già avuto modo di dire, una buona logica epistemica include parte della propria metalogica. È quanto afferma la seguente formula di idempotenza:

$$\vdash_{\mathrm{I}} \mathrm{T}p \Leftrightarrow \mathrm{TT}p.$$

La formula si può interpretare alla Lacan come inesistenza del metalinguaggio o dell'Altro dell'Altro. Il teorema corregge il logocentrismo alla base di tutta la produzione di Lacan. Il Grande Altro sarebbe per lo psicanalista parigino il luogo della parola e della verità. Dopo Cartesio, in verità, la verità non ha più un luogo suo proprio, se non nel dio non ingannatore (ma esiste?). All'interno di una logica non contradditoria non si può, infatti, definire un predicato che predichi la verità di tutti gli enunciati (Tarski). La verità si può dire solo a metà, riconoscerà più tardi anche Lacan. Lasciata la verità alle spalle, in epoca scientifica viene in primo piano il problema della certezza. Per la logica epistemica, allora, l'Altro, è il luogo del sapere certo, che rimane immanente a se stesso. Il sapere è dell'Altro, giusta la definizione di inconscio come discorso dell'Altro. $\mathrm{T}p$ significa che l'Altro sa che p, ma questo sapere rimane inconscio per il soggetto.

Il teorema, tuttavia, si può interpretare in tanti altri modi. Per esempio, che non esiste il metateatro, essendo ogni al di là del teatro a sua volta teatrale o teatralizzabile. La scena primaria del fantasma ammette infinite teatralizzazioni che sono ancora primarie. La possibilità di analizzare il fantasma, di attraversarlo, come dicono i lacaniani, si fonda su questo teorema.

Tra le possibili interpretazioni del teorema la seguente suggerisce un altro argomento a favore dell'epistemicità della logica intuizionista. Gödel trovò una trascrizione delle fbf intuizionistiche nel sistema modale S4 di Lewis tale che una fbf è un teorema intuizionista sse è un teorema di S4. Senza entrare nei dettagli, dico solo che S4 è uno dei tanti sistemi modali che assiomatizzano l'operatore "necessario". L'interpretazione standard del "necessario" in S4 è "dimostrabile" (*beweisbar*, secondo Gödel). In altri termini, la logica intuizionista è un modello del sapere dimostrabile. L'assioma caratteristico di S4 è

$$\vdash_{S4} \mathrm{B}p \Leftrightarrow \mathrm{BB}p,$$

analogo al precedente teorema. Tali teoremi mostrano che i sistemi epistemici deboli hanno "coscienza" del proprio sapere, senza – questo è interessante – esplicitamente supporla con assiomi *ad hoc*. Se una fbf è dimostrabile S4 dimostra che è dimostrabile mediante un assioma aggiunto al calcolo classico. Ma la logica epistemica se sa qualcosa sa di saperla, come dire? di suo. Non c'è bisogno di introdurre tale coscienza dall'esterno con u n assioma. Analogamente anche l'inconscio non può non sapere di sapere.

$$\vdash_{I} \neg\neg \mathrm{TT}p.$$

Il teorema vale anche per il mio modo di fare teoria che non distingue il fare teorico da quello pratico. So qualcosa in pratica, che ritrovo in teoria, ma questo secondo sapere è lo stesso sapere di partenza e viceversa partendo dalla teoria.

Dimenticare Popper

Colgo l'occasione per chiarire la natura della difficoltà che Popper incontrò affrontando l'epistemologia della psicanalisi con strumenti aletici binari. Come è noto, Popper si inserisce nella tradizione scettica humeana, secondo la quale una tesi, per esempio di causalità, non può essere corroborata ma solo confutata dall'esperienza. Per esempio la tesi che q segue da p è falsificata da un unico caso in cui q non segue da p, ma non è resa più vera da mille casi in cui empiricamente si registra che q segue da p. Lo strumento logico fondamentale utilizzato da Popper è il *modus tollens*.

Non è, però, su questo punto che critico Popper. *Il modus tollens* è un teorema intuizionista che mi va bene. Quel che mi va meno bene è che la falsificazione sia realizzata rispetto a un *database* di protocolli sperimentali precostituiti e non ulteriormente falsificabili. Se la scienza è un sapere che si può autocorreggere – l'autocorrezione è un concetto più ampio di quello di autoconfutazione – devono poter cambiare anche i "dati" rispetto ai quali si correggono le teorie. In un nuovo paradigma scientifico non cambiano solo le teorie, cambiano anche i dati rispetto a cui sono vere, perché sono prodotti con nuovi strumenti, prodotti a loro volta da nuove teorie. Insomma, nella misura in cui sono scientifici, cioè risultano da strumenti di rilevazione – e non sono solo dati percettivi empirici – anche i cosiddetti dati sono "gravidi di teoria", direbbe bachelard, come lo sono i dispositivi meccanici che li producono. In effetti, i dati non sono nulla di "dato" in assoluto, ma sono per una teoria fisica quel che per una teoria logica sono gli assiomi. Cambiano da teoria a teoria.

La tesi di Popper è che il sapere inconscio sia inconfutabile e che l'analista, di conseguenza, abbia sempre ragione a imporre le proprie convinzioni al paziente. Smonto l'obiezione, già ben nota a Freud, che la tratta all'inizio di *Costruzioni in analisi*, in modo un po' diverso da Freud. Con un giro dimostrativo appreso dalla *consequentia mirabilis* dimostro che, se il sapere inconscio è confutabile, allora è inconfutabilmente un sapere. Ammetto che il sapere dell'Altro intorno a p sia refutabile. Allora è un teorema $\neg \mathrm{T}p$. Ma sarà un teorema anche $(\mathrm{T}p \vee \neg\, \mathrm{T}p)$, cioè $\mathrm{TT}p$, che abbiamo appena dimostrato equivalente a $\mathrm{T}p$. Ancora una volta da un'ipotesi di non sapere abbiamo dedotto cartesianamente un sapere. Ma pare che Popper non abbia mai avuto molta familiarità con Cartesio, che riteneva superato. Una debolezza comune a molta parte della cultura anglosassone, soprattutto di impostazione analitica.

Un non teorema controontologico

Dopo tanti teoremi, un non teorema di logica predicativa. L'argomento ontologico di Anselmo, che dimostra l'esistenza di dio, a partire dall'ipotesi che sia perfetto, quindi che esiste, perché l'inesistenza sarebbe un'imperfezione, fu già smontato da Kant (l'esistenza non è una qualità!). In logica intuizionista l'argomento semplicemente non vale. In formule:

$$\dashv_{\mathrm{I}} \exists x.\mathrm{T}p(x) \Rightarrow \mathrm{T}\exists x.p(x).$$

A parole, se esiste un oggetto individuale x, di cui sai che è fatto in un certo modo – $p(x)$ predica la perfezione di x – non discende necessariamente che tu sappia che tale x esiste. Con questo – attenzione! – non sto dimostrando che dio non esiste. Sarebbe una fesseria tanto quanto dimostrare che esiste! Ma lascio dio al suo destino ontologico. Più che le sorti dell'essere mi interessano quelle del sapere. Come già osservato, in questa logica epistemica le dimostrazioni di esistenza sono sempre costruttive. Si basano sull'esibizione di un esemplare; non si accontentano di negare una generalità, per esempio l'impossibilità dell'inesistenza. Il costruttivista è disposto a credere a un esemplare concreto di dio. Lo convince di più un dio incarnato come Gesù Cristo, che la dimostrazione teista di qualche filosofo. Anche perché il primo crea un collettivo di pensiero, non importa quanto delirante, mentre la seconda rimane un'astrazione individualista che non stabilisce legami sociali.

Il significato clinico di questo "non" teorema è evidente e non poco rilevante per la pratica analitica. Il paziente può ben sapere come sarebbe fatto l'oggetto che desidera, senza arrivare riconoscerlo neppure quando gli è messo di fronte o ce l'ha alle spalle nel transfert. I problemi della cosiddetta relazione oggettuale nascono tutti dall'impotenza cognitiva del soggetto (come vedremo, finito) di fronte all'oggetto (infinito). In fondo l'oggetto non accede *tutto* alla coscienza. La parte che rimane in ombra – cfr. l'archetipo junghiano dell'ombra, ma si potrebbe parlare metaforicamente dell'altra faccia della luna – causa il desiderio inconscio che la coscienza non riconosce nell'immediato. In clinica analitica si parla quotidianamente di cose di cui una volta si discettava in teologia. Giustamente Benjamin consigliava allo storico materialista di studiare teologia (*Prima tesi sulla storia*). La psicanalisi attinge al *corpus* teologico prelevando le logiche costruttiviste, in grado di realizzare quelle *Costruzioni in analisi*, di cui parlava Freud alla fine della sua carriera. Per costruzioni qui si intende l'argomentazione concreta circa le proprietà dell'oggetto – il vecchio buon dio – che per l'intuizione rimangono in ombra. Sul punto Lacan ironizzava causticamente: *Per l'ateo dio è inconscio*.

Un sistema cognitivo

Il mio modo di fare logica epistemica non è quello generalmente adottato nell'accademia. Benché la matematica si possa fare in tanti modi, ci sono quelli più gettonati e quelli meno. Il mio non è tra i più diffusi. Sicuramente non è il modo classico, inaugurato nel 1932 da Lewis e Langford per i sistemi assiomatici di logica modale, costruiti aggiungendo alla logica classica nuovi assiomi per gli operatori modali "necessario" e "possibile".

Prima di passare alla semantica della logica intuizionista do un esempio di assiomatizzazione epistemica costruita in modo alternativo al mio, cioè non per sottrazione di vincoli alla logica classica, ma per aggiunta di nuovi – gli assiomi cognitivi – che descrivano le caratteristiche delle prestazioni cognitive che si vogliono ottenere dal sistema. Per tale ragione preferisco parlare di sistemi cognitivi più che di sistemi epistemici. Essi, infatti, si interessano all'adeguamento della cognizione alla realtà più che al sapere innato del soggetto.

Sia C l'operatore cognitivo da definire implicitamente con assiomi. Tutti i sistemi cognitivi hanno un (meta)assioma di cerniera, che aggancia il sistema cognitivo vero e proprio alla logica classica. Un assioma di cognitivizzazione potrebbe essere:

Se $p \vdash_{\mathrm{C}} \alpha$ allora $\mathrm{C}p \vdash_{\mathrm{C}} \mathrm{C}\alpha$.

A parole, se dalla premessa p discende la tesi α, allora dalla conoscenza di p discende la conoscenza di α.

Gli assiomi cognitivi veri e propri sono del tipo:

1. $\vdash_{\mathrm{C}} \mathrm{C}\alpha \Rightarrow \neg\mathrm{C}\neg\alpha$;
2. $\vdash_{\mathrm{C}} \mathrm{C}\alpha \Rightarrow \mathrm{CC}\alpha$;
3. $\vdash_{\mathrm{C}} \neg\mathrm{C}\alpha \Rightarrow \mathrm{C}\neg\mathrm{C}\alpha$.

Il resto segue per *modus ponens*. L'operatore C veicola il significato di credere nel senso di essere certi o convinti. Il primo assioma fa la differenza tra T e C, mentre gli altri due valgono anche per T. Questi sistemi assiomatici sono utilizzati per costruire robot intelligenti, cioè adeguati alle intenzioni di chi li costruisce. (Tra parentesi, l'adeguamento cognitivo non è mai alla realtà in sé, ma alla realtà del padrone). Non mi scaldo per i programmi di intelligenza artificiale. Le mie perplessità non riguardano l'artificialità del programma – l'artificialità e il meccanicismo sono sempre benvenuti – ma l'intelligenza.

La ragione per cui non amo l'approccio alla Lewis, adottato dal cognitivismo, è che produce sistemi "pesanti", a rischio di contraddizione. Infatti, continuando ad aggiungere assiomi, si aggiungono vincoli sempre più forti e sempre più numerosi, che rischiano di configgere tra di loro, compromettendo la stabilità della struttura. L'evento è facile a realizzarsi quando si opera in un campo sconosciuto, come l'epistemologia dell'inconscio. Perciò è più prudente il metodo che procede per sottrazione di vincoli.

Obiezione critica al cognitivismo

Tra i primi a interessarsi all'assiomatizzazione cognitiva della logica epistemica fu nel 1963 Edmund L. Gettier nell'articolo, che ora si può trovare anche sul web, intitolato *Is Justified True Belief Knowledge?*, "Analysis", 23, 1963, pp. 121-123. Secondo questo autore tutte le assiomatizzazioni della conoscenza sono varianti di uno schema unico che comprende tre tipi di assiomi. Essi assiomatizzano la circostanza che il soggetto *S* sia a conoscenza di *p* nel modo seguente, che non è nuovo ma risale a Platone:

G1. *p* è vero;
G2. *S* crede che *p* è vero;
G3. *S* sa giustificare la credenza in *p*.

Nel *Teeteto* Teeteto chiede a Socrate se conosce la dottrina secondo cui "la conoscenza è l'opinione vera accompagnata da ragione (*doxa alethés metà logou*); e che opinione senza ragione è al di fuori di conoscenza: che quindi le cose di cui non si dà ragione non sono conoscibili" (201d).

Il punto critico dei sistemi epistemici che lavorano per aggiunta di assiomi alla logica classica, in particolare del cognitivismo, è l'adozione di un criterio forte di verità, che stabilisca che cosa è vero e cosa è falso sempre e comunque. In questo senso, il cognitivismo è un'*enclave*, praticamente un fossile, della vecchia psicologia della conoscenza, codificata da Aristotele nella *Fisica*, incluso nella scienza moderna. Si nasconde bene dietro la maschera della *computer science*. Il suo fondamento è il criterio di verità come adeguamento dell'intelletto alla cosa. Per il cognitivismo non c'è altro sapere che la registrazione cognitiva accurata – in fotocopia – della realtà là fuori dalla finestra; non c'è altra scienza che la conoscenza della realtà effettuale. Di inconscio o di sapere che non si sa ancora di sapere non se ne parla neppure. Non è un caso che il cognitivismo ci venga proposto da un'area culturale dove predomina la lingua inglese, lingua epistemicamente povera. In inglese, infatti, esiste un solo verbo epistemico, *to know*, conoscere, e una sola forma di sapere: *knowledge*, conoscenza. A differenza dalle lingue continentali l'inglese non distingue tra *conoscere* e *sapere*, *connaître* e *savoir*, *kennen* e *wissen*, *conocer* e *saber*. In un certo senso il mondo anglosassone è condannato al cognitivismo o, meglio, il cognitivismo è l'artefatto intellettuale di una lingua carente di attrezzi per esprimere la situazione epistemica di dubbio, convinzione, credenza, certezza. Perciò nei sistemi cognitivi che provengono da quel mondo non può mancare un assioma di tipo G1, cioè l'assunzione di verità, cui il sapere deve adeguarsi. Ritorna qui il predominio della verità sul sapere, tipico dell'età classica e medievale. Ma il punto debole è proprio questo. Porre in cima alla teoria un assioma che garantisca la verità per ogni enunciato è pericoloso. Il rischio è di generare contraddizioni. Infatti, Tarski ha dimostrato un teorema simile a quello di Gödel, secondo il quale in un sistema non contraddittorio e sufficientemente potente (cioè in grado di esprimere l'infinito aritmetico) non si può definire un predicato *verità*, il quale per ogni enunciato del sistema dica che è vero se e solo l'enunciato se è vero nella teoria.

Come aggira la difficoltà il cognitivismo? Semplicemente con l'assunzione implicita – ideologica – di un'istanza arbitrale di tipo superegoico che stabilisca:

a. cosa c'è e cosa non c'è (principio ontologico);

b. cosa è vero e cosa è falso (principio di autorità);

c. se l'adeguamento c'è e se è buono o meno buono (principio di abilitazione).

Dato siffatto assetto epistemico, sostanzialmente servile e burocratico, non è difficile per Gettier scovare controesempi di sapere che non soddisfano i tre assiomi. Ne riporto un paio, giusto per far capire in che tipo di falsi paradossi si impania il cognitivismo.

Controesempio 1. *La segretaria del direttore è in ufficio?* Il direttore getta un'occhiata nella stanza e vede, seduta dietro la scrivania, una figura di donna che assomiglia esattamente alla sua segretaria. Possiamo supporre che il direttore sia pienamente giustificato nell'accettare il fatto che la segretaria sia in ufficio. Tuttavia potrebbe trattarsi della sorella gemella della segretaria. La vera segretaria è nascosta dietro la scrivania, pronta a fargli "buh!"I tre assiomi, sarebbero soddisfatti:

G1. la segretaria è in ufficio;

G2. il direttore crede che la segretaria sia in ufficio;

G3. il direttore è giustificato a crederlo,

ma la conoscenza del direttore è falsa.

Controesempio 2. *Il mito Ferrari*. Un insegnante ha due allievi, signor Bianchi e signor Rossi. Il signor rossi sembra orgoglioso della propria Ferrari. Dice di possederne una, la porta di qua e di là e ha i documenti che ne attestano la proprietà, ma di fatto non possiede nessuna Ferrari. L'insegnante conclude che nella sua classe qualcuno ha una Ferrari. Ciò è vero perché il signor Bianchi ne possiede segretamente una. Ancora una volta gli assiomi sono soddisfatti ma non c'è conoscenza.

A suo modo il cognitivismo, dichiarando il proprio fallimento, denuncia l'esistenza di un sapere – nei suoi termini una *conoscenza* – che non può essere ridotto a credenza vera giustificata. Infatti l'inconscio è un sapere tutto ancora da giustificare. In un certo senso, il sapere inconscio non esiste prima dell'analisi che lo porta alla "conoscenza". Il mio modo di procedere epistemico per sottrazione di vincoli non ha bisogno di un "fondamento" di verità. Esso viene a conoscenza della verità in modo naturale, come prevedono i teoremi di fondazione degli operatori epistemici:

$$\vdash_{\mathrm{I}} p \Rightarrow \mathrm{T}p.$$

A ciascuno il suo… sapere

Da quanto precede non vorrei aver dato l'impressione di voler proporre un sistema di logica epistemica superiore agli altri e migliore in ogni caso. Il mio sistema è adatto alla mia esperienza, che è molto circoscritta e speciale, essendo l'esperienza del sapere inconscio. Non mi meraviglierei che la logica epistemica di stampo brouweriano non vada bene per le esigenze del cognitivismo, esattamente come le formulazioni cognitiviste non vanno incontro alle esigenze dell'analista.

Sono il primo a riconoscere che nel mio sistema epistemico manca un ingrediente fondamentale per la formalizzazione cognitivista del sapere. Infatti, l'operatore epistemico T non gode della proprietà transitiva rispetto all'implicazione. Sapere che *p* implica *q* non implica che, se sai *p*, allora sai *q*. In formule,

$$\dashv_{\mathrm{I}} \mathrm{T}(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\mathrm{T}p \Rightarrow \mathrm{T}q).$$

In effetti il sapere inconscio non è come il sapere conscio, che si scarica dalle premesse alle conseguenze. La difficoltà dell'analisi dipende anche da questo fatto: per arrivare all'implicazione tra i saperi sui singoli enunciati non basta sapere che vale l'implicazione tra enunciati, ma bisogna fare un giro più lungo, a volte molto lungo.

Sapere non è solo conoscere

La differenza tra logica cognitivista e logica epistemica si radicalizza, ma anche si esprime al meglio in due teoremi, che rappresentano i nuclei paradigmatici dei due approcci. Considero come emblematico dell'approccio cognitivista il sistema *G* (*G* da *glauben*, credere) di Lenzen (W. Lenzen, *Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit. Systeme der epistemischen Logik,* Springer Verlag, Wien 1980, p. 142). Il sistema *G* è costruito per aggiunzione al calcolo proposizionale classico di tre assiomi e una regola di deduzione. Tra gli assiomi il primo si scrive così:

$$\vdash_{\mathrm{G}} \mathrm{G}p \Rightarrow \neg\mathrm{G}\neg p.$$

Si tratta di un assioma rigidamente binario. Esso mette in contrapposizione credere e non credere. Infatti, afferma che *se credi che p, allora non puoi credere che non p*.

È facile verificare, sostituendo all'operatore G l'operatore T, che nella logica epistemica intuizionista tale teorema non vale. Anzi vale il converso:

$$\vdash_{\mathrm{I}} \neg\mathrm{T}\neg p \Rightarrow \mathrm{T}p.$$

In un certo senso si tratta di un teorema fondazionale. Esso afferma che all'interno di ogni sapere c'è un nucleo di non sapere o ignoranza. In particolare, non c'è sapere che non ignori qualcosa della negazione. Insomma, il sapere che non si riduce a conoscenza, cioè ad adeguamento dell'intelletto alla cosa, poggia su una decisione etica: tagliare dal corpo epistemica qualcosa che riguarda la negazione, la quale risulta così ultimamente non conoscibile in modo completo. Il saggio di Freud sulla *Negazione* (1925), dove la negazione non sempre nega, ma facilita il ritorno del rimosso, rientra in questa logica.

Breve digressione polemica

Tradizionalmente si presenta la logica intuizionista come logica che sospende il TE. Ai suoi tempi questo modo di presentarla generò reazioni di difesa e controreazioni di attacco che hanno irrigidito il dibattito tra due scuole – da sempre, dove c'è rigidità, c'è scuola, come dice una nota pubblicità, e viceversa purtroppo. Da una parte si schierava la scuola intuizionista, favorevole a sospendere non solo il TE, ma anche le recenti scoperte sull'infinito di Cantor. Dall'altra rispondeva la scuola formalista di

Hilbert, che accettava Cantor, ma si ostinava ad ammettere in matematica solo assiomatizzazioni elementari, per intenderci quelle con *S* finito. Dello scontro ideologico di settantacinque anni fa oggi non resta più quasi memoria. La matematica oggi si fa come duemila anni fa: se funziona, si conserva, come il sapere vero, altrimenti si butta via, come il sapere falso. Chiamatelo se volete pragmatismo.

Credo, tuttavia, che la mia presentazione dell'intuizionismo, che fa discendere la sospensione del terzo escluso dall'asimmetria tra vero e falso, sia un'assiomatizzazione facilmente comprensibile anche per non matematici. Anche chi è di formazione umanistica recepisce facilmente il discorso secondo cui le leggi classiche di monotonia sono due, sia del vero sia del falso, che si riducono a una nel caso intuizionista: la legge di monotonia del vero. Il resto sono dettagli che si possono benissimo apprendere con un po' di applicazione. E poi ci si può prendere anche qualche soddisfazione nei confronti di altri umanisti, rimasti ignoranti. Per esempio, nei confronti di un mostro sacro dell'italica cultura, più noto come romanziere che come semiologo, il quale in una conferenza francofortese del 1897, pubblicata nel 1990, affermò che il *modus ponens*, "il modo di ragionamento tipico del razionalismo occidentale", discenderebbe dal TE e dagli altri principi della logica ontologica. Ma il calcolo intuizionista dimostra proprio il contrario. Il *modus ponens* si dimostra intuizionisticamente (verificarlo!) senza usare il TE. *Ergo* il *modus ponens* è indipendente dal TE. L'affermazione del falso umanista fu per lo meno imprudente.

Dopo l'interruzione

L'interruzione non è stata un'interruzione, perché abbiamo continuato a parlare di logica anche durante la pausa caffè. Il mio contributo a questo seminario è sostanzialmente uno: contribuire a far scendere la logica dal vertice della piramide del sapere, innanzitutto pluralizzandola, cioè facendo vedere che esistono più logiche, come esistono più matematiche. Se la logica è plurale non può occupare il vertice della piramide che è singolare. La logica, come scienza del logos*, galleggia a metà della piramide, che a sua volta, secondo me è tronca, non ha un vertice unico da cui si possa scendere gerarchicamente per percorrerla tutta.*

Ora di semantica

Vorrei che vedeste come sotto il velame delle formule astruse si conservi, deformato e spostato, un senso non lontano dall'esperienza della clinica psicanalitica. Se non sono riuscito a farvi vedere certe analogie a livello sintattico, provo a livello semantico, avvertendovi però che è leggermente più astratto di quello sintattico.

La difficoltà di trattare la semantica sta nel fatto che si avvicina alla verità più della sintassi, la quale preferisce schierarsi dalla parte del sapere. La semantica ha come argomento il vero, in senso vero-funzionale, mentre la sintassi opera con il sapere. I due approcci sono complementari in strutture povere (logiche), ma divergono in strutture ricche (aritmetiche). Se è vero che modernamente la verità si può dire solo a metà, anche la semantica moderna sarà dimezzata. Infatti, il nostro approccio sarà estensionale – cioè in riferimento a insiemi cose epistemiche, gli s.e. – e non intensionale – cioè dalla parte dei concetti e della comprensione. La giustificazione della preferenza accordata all'approccio estensionale risulterà presto chiara, essendo legata a esigenze intrinseche alla logica in esame, molto poco ideologiche.

In apparenza tutto rimane come prima, anche se con piccole differenze. Parlo ancora di s.e. che forzano certe fbf a essere vere ($\models$), secondo le proprietà dei connettivi. Parlo ancora di modelli che verificano certe formule e falsificano certe altre (contromodelli). Le tautologie e le formule valide sono ancora come prima vere in ogni modello. La differenza è che ora i modelli sono più ricchi di stati e più complicati. Sono sempre costituiti da stati di sapere, ma ora interviene una struttura a organizzarli. In fondo, tutti i modelli di logica classica sono semplici, per non dire semplicistici: si possono ridurre a un solo stato di sapere o a un conglomerato di stati di sapere destrutturati, nel quale idealmente si sa come stanno le cose. La logica classica ha una visione schematica e poco dialettica del sapere: tutto si riduce a sapere l'essere dell'esserci *hic et nunc*. Si tratta, in realtà, di una logica monoepistemica. Che i modelli monoepistemici fossero insufficienti per costruire la semantica intuizionista, lo si sapeva. Gödel dimostrò che in qualche modo, allora sconosciuto, la logica di Brouwer doveva far posto a modelli con infiniti stati di sapere. Il teorema di Gödel mi ha sempre fatto pensare che nell'intuizione di Brouwer di sospendere il TE ci fosse qualcosa di veramente moderno.

A lezione di infinito

La modernità nasce nel momento in cui il soggetto, come direbbero i lacaniani, cessa di *fuorcludere* l'infinito dal discorso ma impara a confrontarsi con esso. L'infinito è la contingenza dell'epoca moderna. Come direbbe Lacan in una delle sue oscure intuizioni logiche, l'infinito si comporta modernamente come il fallo: cessa di non scriversi (per Lacan la definizione di contingenza). Il soggetto della scienza moderna si differenza dai soggetti epistemici precedenti – classici e medievali – perché, a differenza di quelli, sa trattare l'infinito.

L'infinito della modernità non è l'indeterminato, non è l'*apeiron* della classicità. Non è il sempre più grande, ma di fatto sempre finito. Per Euclide la retta geometrica non è attualmente ma solo potenzialmente infinita. Conformemente alla metafisica aristotelica, su cui Euclide si spalma, l'infinito non esiste, anzi è potenzialmente contraddittorio. La retta euclidea è una successione di segmenti sempre più grandi ma ciascuno, considerato in sé, sempre limitato. (Qui gioca un'ulteriore confusione concettuale, tipica dell'età classica, che non distingueva tra la nozione di finito e quella di limitato. Solo Spinoza comincerà a distinguere tra finito e limitato, esibendo modelli di infinito continuo ma limitato. Cfr. *Lettera* XII a Lodovico Meyer). L'infinito greco è *a peras*, senza limite o illimitato, perché il limite, una volta fissato, viene sempre superato. Ma quale sia questo limite si lascia completamente indeterminato, per cui l'infinito coincide con l'impossibilità della determinazione concettuale (o intensionale, come preferirebbe dire Carta).

Il contributo della cultura latina alla logica e alla matematica fu nullo. Il contributo perenne della cultura latina fu il diritto, cioè la legge del più forte. I romani antichi erano conquistatori. Non avevano bisogno di logica per conquistare i popoli, ma di leggi “chiare e distinte” per consolidare le proprie conquiste.

L'infinito attuale inizia a far capolino nella cultura medievale, dove si presenta come l'Uno e l'Assoluto della teologia. Di lui si può parlare, in positivo o in negativo, si possono predicare certe cose e non altre, per esempio che è causato da se stesso, ma in effetti non si interviene su di esso né lo si manipola. Si comincia ad agire sull'infinito, si comincia, cioè, a trattarlo come oggetto del discorso scientifico solo in epoca rinascimentale. Nel primo seminario vi ho mostrato l'esempio di Maurolico che dimostra induttivamente la proprietà di Nicomaco, riguardante la somma dei primi numeri dispari. Il metodo di induzione è un metodo per trattare l'infinito numerabile. Il calcolo infinitesimale, talvolta detto sublime, nelle versioni complementari di calcolo differenziale e integrale, è un metodo per trattare l'infinito non numerabile o continuo. Come vedete, nella modernità l'infinito non solo si attualizza, ma addirittura si pluralizza: l'infinito dei numeri naturali non è quello dei punti della retta o di una curva nello spazio. Ce n'è abbastanza per essere sconcertati. Bolzano scrisse un libretto intitolato *I paradossi dell'infinito,* il più importante dei quali è la possibilità di mettere in corrispondenza uno a uno un insieme infinito, per esempio l'insieme dei numeri naturali, con un suo sottoinsieme proprio, per esempio l'insieme dei quadrati, come aveva già scoperto Galilei. I numeri pari sono altrettanto infiniti degli interi. L'infinito attuale fa saltare la legge della metafisica aristotelica, secondo cui la parte non può essere uguale – ugualmente estesa – rispetto al tutto. Perciò l'infinito si tratta male con strumenti concettuali, come quelli intensionali, che non riservino un giusto spazio alla *res extensa* e alle sue proprietà non concettuali.

La strada aperta dai rinascimentali si dimostrò *a posteriori* una strada infinita. Nell'Ottocento Cantor dimostrò che si possono confrontare tra loro operativamente gli infiniti con il metodo della corrispondenza biunivoca e stabilire se un infinito è più o meno esteso di un altro. Per esempio l'infinito numerabile del contare è "più piccolo" dell'infinito continuo del disegnare. Con il metodo diagonale Cantor dimostrò che esistono infiniti infiniti diversi, sia a livello cardinale sia a livello ordinale. Sono i cosiddetti numeri transfiniti su cui si può operare con un'aritmetica simile a quella elementare. Non voglio entrare nei dettagli, perché il mio discorso sull'infinito di oggi non vuole esaurire l'argomento ma semplicemente introdurre alla semantica intuizionista e chiarire la differenza con la semantica classica. Mi basta far notare che l'operatività del soggetto finito non è inibita dall'infinità dell'oggetto, benché questi possa sembrare troppo grande. In realtà il matematico lavora con i primi tre o quattro infiniti della scala: l'infinito del contare, del disegnare e delle corrispondenze funzionali tra un infinito e l'altro. Gli infiniti superiori sono ancora guardati con sospetto.

La semantica ordinale di Kripke

Per costruire la semantica intuizionista basta l'infinito più piccolo, quello numerabile. Il merito della costruzione della semantica intuizionista è di Kripke, che negli anni Sessanta ha proposto come modelli intuizionisti dei grafi, eventualmente infiniti, formati da vertici, che sono gli s.e., e da lati che rappresentano la relazione di accessibilità R da uno s.e. all'altro. La relazione R è un preordine, riflessivo e transitivo. Indicando gli s.e. con lettere greche maiuscole, si ha:

1. (*riflessività*) $\Gamma R \Gamma$,
2. (*transitività*) Se $\Gamma R \Delta$e se $\Delta R \Omega$, allora $\Gamma R \Omega$.

La relazione R di accessibilità è in seguito rappresentata da un tratto verticale tra s.e.

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ | \\ \Delta \end{array}$$

Il tratto indica che dallo s.e. Γ si accede allo s.e. Δ, ma non viceversa. (Per non appesantire la scrittura si omettono gli autoriferimenti degli stati e le transizioni dovute alla transitività). I parametri (o gli individui) di Γ sono presenti anche in Δ, se Δ è accessibile da Γ. $\Gamma_{a,\,b} \models p(a)$ significa che lo s.e. Γ, con parametri a e b, "forza" $p(a)$ ad essere vera. La riflessività e la transitività introducono in semantica i principi logici, rispettivamente, dell'identità e del *modus ponens*. La legge di conservazione del vero si materializza nella conservazione degli individui e delle formule atomiche nel passaggio da uno stato ai successivi.

Indicando con Γ^* gli s.e. accessibili da Γ, valgono le condizioni seguenti per la costruzione di modelli:

0. I parametri di uno s.e. si mantengono in ogni stato accessibile da esso;
1. $\Gamma \models p$ solo se p è una formula atomica con parametri di Γ;
2. $\Gamma \models p$ solo se $\Gamma^* \models p$ (p atomica);
3. $\Gamma \models (p \wedge q)$ sse $\Gamma \models p$ e $\Gamma \models q$;
4. $\Gamma \models (p \vee q)$ sse $\Gamma \models p$ o $\Gamma \models q$;
5. $\Gamma \models \neg p$ sse $\neg p$ ha solo parametri di Γ e $\Gamma^* =\mid p$ per ogni Γ^* ($=\mid$ sta per *non* $\models$);
6. $\Gamma \models (p \Rightarrow q)$ sse $(p \Rightarrow q)$ ha solo parametri di Γ e se, per ogni Γ^*, $\Gamma^* \models p$, allora $\Gamma^* \models q$;
7. $\Gamma \models \exists x.p(x)$ sse, per qualche parametro a di Γ, $\Gamma \models p(a)$;
8. $\Gamma \models \forall x.p(x)$ sse, per ogni Γ^* accessibile da Γ e per ogni parametro a di Γ^*, $\Gamma^* \models p(a)$.

Posto che un modello sia un'organizzazione di s.e., si dice che una formula α è valida in un modello se ogni s.e. del modello la forza ad essere vera. Se è valida in ogni modello si dice che è *logicamente valida*. Se almeno un modello la soddisfa, si dice che la fbf è *soddisfacibile*. Ovviamente ogni formula valida è soddisfacibile, ma non viceversa.

La novità sostanziale rispetto alla semantica classica è che per certi operatori la valutazione della verità ora non avviene in modo completo e istantaneo *qui e ora* nello s.e. Γ dell'enunciazione, ma dipende da quel che succede negli stati successivi Γ^*, accessibili da Γ. In un certo senso, la valutazione della verità richiede un tempo di sapere: occorre aspettare di sapere cosa succede a valle, prima di poter affermare la verità a monte. Questo *verweilen*, o indugiare, prima di poter dire la verità, vale per gli stessi operatori per i quali avevo imposto delle restrizioni sul falso, cioè per la negazione, l'implicazione e la quantificazione universale. Ecco come questa semantica funziona nel sospendere il TE. Considero il modello:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ | \\ \Delta \models p \end{array}$$

Mi chiedo se nello stato Γ di tale modello valga $p \vee \neg p$. p non compare tra le formule forzate da Γ. Quindi potrei congetturare che $\Gamma =\mid p$, cioè $\Gamma \models \neg p$. Ma devo andare piano prima di fare l'affermazione, perché ho da controllare se anche gli stati accessibili da Γ forzano oppure no p. Potrei affermare $\Gamma \models \neg p$ se per ogni s.e. successivo riscontrassi la non forzatura: $\Gamma^* =\mid p$. Ma proprio in questo modello lo stato Δ, successivo a Γ, forza p a essere vera: $\Delta \models p$, quindi non posso affermare $\Gamma \models \neg p$. In conclusione, nello stato Γ non vale né p né $\neg p$: p non vale perché *non* compare tra le fbf di Γ, $\neg p$ non vale perché p compare tra le formule di Γ^*, cioè in Γ non vale TE. Ora sono sicuro che TE non è dimostrabile in logica intuizionista, perché ho trovato un suo contromodello.

Il contromodello, però, ha anche qualcosa di positivo da dire. In logica intuizionista il TE non vale in astratto e *a priori*, senza sapere se vale effettivamente o *p* o *non p*. Di più. Posso stabilire sicuramente se TE vale o non vale quando il numero degli s.e. è finito. Infatti, in tal caso posso passare in rassegna esaustivamente il numero degli stati e verificare direttamente se vale o non vale *p.* In ogni caso, supponendo il numero degli stati finito, posso sempre trovare un modello in cui TE vale. Riprenderò questa considerazione, cioè che la finitezza è condizione necessaria per la validità di TE, quando nell'ultimo seminario ripercorrerò il processo cartesiano di soggettivazione attraverso il dubbio epistemico.

Con considerazioni analoghe un contromodello per l'argomento ontologico è

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ | \\ \Delta_a \models p(a). \end{array}$$

Il contromodello dimostra anche che l'assetto di questa logica è poco ontologico. Il contributo di Brouwer è stato, quindi, a mio parere decisivo per indebolire la dittatura del pensiero metafisico aristotelico sul pensiero matematico. Non resta che augurarsi che tale indebolimento venga recepito anche dal pensiero filosofico.

Le considerazioni semantiche confermano, infine, il valore epistemico della logica intuizionista. Infatti, la semantica ordinale di Kripke vale anche per il sistema modale S4, dove l'operatore "necessario" si interpreta come "dimostrabile". Entrambe le logiche fanno giocare in modo essenziale il tempo e l'infinito, nel senso che la dimostrazione si guadagna, il sapere si ap-prende, con un certo tempo di ap-prendimento, che può essere anche molto lungo. Le difficoltà a pensare il tempo, da Agostino in poi, sono le stesse difficoltà a pensare l'infinito, in particolare l'infinito continuo. Non si può pensare il tempo senza pensare l'infinito e viceversa, come dimostrano queste brevi considerazioni sulle serie numeriche.

Esercizio 6. Il *modus supponens* si può scrivere $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p.$ Trovare un contromodello, ossia un modello dove l'antecedente sia vero e il conseguente falso. Quanti s.e. ha? Discutere quali rapporti potrebbe avere con la rimozione freudiana.

Il seguente modello esemplifica la legge di permanenza del vero:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_0 & \\ | & \\ & \Gamma_1 \models p \\ | & \\ \Gamma_2 \models p & \\ | & \\ & \Gamma_3 \models p, q \\ | & \\ \Gamma_4 \models p, q & \\ | & \\ & \Gamma_5 \models p, q, r \\ | & \\ \Gamma_6 \models p, q, r & \\ | & \\ & \Gamma_7 \models p, q, r, s \\ & \ldots \end{array}$$

Un punto per l'estensione

A livello semantico è facile rendersi concretamente conto di come l'indebolimento binario aumenti la portata argomentativa. Innanzitutto, i modelli intuizionisti hanno una struttura più complessa di quelli classici. Infatti, prevedono più stati, mentre i modelli classici sono estremamente semplici, per non dire semplicistici, essendo costituiti da un solo s.e. I loro stati, inoltre, sono organizzati da una relazione ordinale, mentre l'unica relazione valida nei modelli classici è la riflessività. Tanto vale a livello qualitativo. Non meno importante la considerazione quantitativa. Infatti, i modelli classici sono meno numerosi di quelli intuizionisti. Formano esattamente un sottoinsieme proprio dei modelli intuizionisti: ogni modello classico è anche intuizionista ma non viceversa. Pertanto, una tesi intuizionista vale in un campo di modelli più ampio di una tesi classica.

Le conseguenze dell'ampliamento sono sotto i nostri occhi. Consideriamo il caso di TE. Il TE è una tesi logicamente valida in logica classica perché in logica classica vige una semantica più ristretta, mentre cessa di valere in logica intuizionista perché quest'ultima ammette una classe più ampia di modelli. Non è difficile capire perché $p \vee \neg p$ valga in ogni modello classico. Ogni modello classico è monostato. Allora i casi sono solo due: o lo stato forza p ($\Gamma \models p$), quindi forza $p \vee \neg p$ ($\Gamma \models p \vee \neg p$), o lo stato non forza p ($\Gamma =\mid p$), quindi forza $\neg p$ e conseguentemente forza $p \vee \neg p$ ($\Gamma \models p \vee \neg p$). Quando il ragionamento si fa più sottile e prevede l'interazione di più s.e. il TE automaticamente decade.

L'ultimo vantaggio dell'ampliamento semantico è che le tesi intuizioniste, essendo valide in un ambito epistemico più ampio, sono più convincenti e più sicure delle tesi classiche. Voi avete capito che sono un fanatico dell'indebolimento. È un fanatismo in un certo senso antifondamentalista, il mio. Cerca di ampliare la base argomentativa e semantica, invece di restringerla, al fine di aumentare le possibilità di accordo, nonché di certezza, che si possono raggiungere nell'interazione intellettuale con l'altro. Nel caso intuizionista è evidente: il campo dei modelli semantici su cui accordarsi con l'altro e su cui basare le nostre certezze è più ampio che nel caso classico. Il privilegiare la certezza sulla verità, per altro, è un tratto caratteristico del pensiero moderno. Ritornerà a proposito del procedimento cartesiano.

Il tempo di sapere

In logica intuizionista emergono intriganti rapporti tra tempo di sapere e verità che la logica classica, essendo la logica di dio, che sa tutta la verità dall'eternità e nell'istante, non consentiva di mettere a fuoco. Quel che si vede è un interessante gioco di esitazioni e accelerazioni. Da una parte, non posso affermare subito la verità di una negazione fino a non aver riscontrato alcuna prova contraria che confuti la negazione stessa.

Dall'altra parte non posso andare troppo piano nell'eseguire il riscontro. Infatti, se mi trovassi in un modello con infiniti stati di sapere, non potrei percorrerli a velocità finita, per esempio costante, perché non ho a disposizione un tempo infinito per decidere, come ingenuamente suppone lo psicastenico. Devo fare più presto. Se il modello fosse del tipo:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_0 \arrow[d, dash] \\ \Gamma_1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{c} | \\ \Gamma_2 \\ | \\ \quad \Gamma_3 \\ \quad \dots \end{array}$$

non riuscirei ad attraversarlo in un tempo finito neppure se il tempo di attraversamento di ogni singolo s.e. fosse inversamente proporzionale alla sua posizione. Infatti, la serie armonica

$$1+1/2+1/3+1/4\dots$$

diverge, ossia, fissato un qualunque numero naturale n, la serie arriva a superarlo, a patto di sommare un numero di addendi sufficiente (molto grande, superiore a 2^{n+1}). Occorre andare ancora più svelti a controllare il modello. Sì, ma come? Potrebbe non bastare saltare sistematicamente degli stati, per esempio limitarsi agli stati dispari, dimezzando i controlli sul modello. Tuttavia, si riuscirebbe nell'intento di rendere finito il tempo di calcolo del modello, per esempio, adottando tempi inversamente proporzionali al quadrato dell'indice di stato. Da Eulero si sa, infatti, che la serie

$$1+1/2^2+1/3^2+1/4^2\dots$$

converge a $\pi^2/6$ (circa 1.645… di pochi centesimi superiore alla sezione aurea). La prima serie corrisponde alla "cattiva infinità" della logica di Hegel, la seconda alla "buona". La distinzione hegeliana non è manichea, ma è il tentativo, condotto con strumenti intellettuali inadeguati, di ap-prendere qualcosa del "tempo dell'infinito". Il problema non è estraneo alla tematica freudiana dell'*Analisi finita e infinita*, cervelloticamente tradotta in italiano *Analisi terminabile e interminabile*. (Vuol dire che in Italia non si sa molto dell'infinito?)

Oltre all'acquisizione del sapere, il problema riguarda anche il godimento femminile. La frigidità è un modo di dire no ai singoli stati di godimento (s.g. *versus* s.e.), senza arrivare a concludere con l'orgasmo finale. Perché? Perché, come nella psicastenia maschile, nella frigidità femminile il soggetto impiega troppo tempo ad attraversare *tutto* il modello infinito e venire a capo del godimento. E di solito dà la colpa al maschio che arriva prima a concludere. (Una delle tante occasioni per esercitare l'invidia del pene, contro il pene). Sui rapporti tra sapere e godimento, così fugacemente accennati, disponiamo solo di fugaci intuizioni di Lacan, tuttora da sviluppare. (Cfr: "Là nel godimento l conquista del sapere si rinnova ogni volta che si esercita, mentre il potere che conferisce rimane sempre orientato al godimento. […] Il sapere si fonda sul fatto che il godimento del suo esercizio coincide con quello della sua acquisizione, J. Lacan, *Le Séminaire. Livre XX. Encore* (1972-1973), Seuil, Paris 1975, p. 89)

ESERCIZIO 7. (difficile). Calcolare, se esiste, l'esponente reale per cui la serie armonica converge alla sezione aurea.

Esercizio 8. (matematico) Calcolare il tempo di attraversamento di un modello infinito se il tempo di attraversamento di un singolo stato è inversamente proporzionale ai termini della serie di Fibonacci.

Il punto da ritenere è che il preordine tra s.e. di un modello intuizionista si può interpretare in modo naturale come ordine temporale, in particolare come ordinamento temporale della dialettica del sapere. La semantica di Kripke introduce in logica una dimensione temporale – scarna quanto volete, non aspettatevi grandi cose – che la logica classica, tuttavia, ignora completamente. L'analista che lavora con lentezza dell'acquisizione del sapere inconscio mediante l'analisi dovrebbe apprezzare il pur piccolo progresso. Gli esercizi precedenti sulle serie numeriche non sono semplici esercitazioni matematiche. Vogliono abituare all'idea di un tempo epistemico che si può calcolare, come già si calcolano i valori di verità delle fbf. Se in questa logica il tempo entra come "terzo incluso", la velocità, che è il modo di trattare il tempo, entra come "quarto"elemento, che coniuga il tempo allo spazio. Si tratta di modi del pensiero che cominciano a chiarirsi e a diventare familiari solo molto tardi, in epoca scientifica. Aristotele non aveva la nozione di velocità istantanea; Zenone prima di lui ha detto solo sciocchezze sulla freccia ferma e Achille che non raggiunge la tartaruga. Entrambi era giustificati nella loro ignoranza, non avendo adeguate concezioni dell'infinito, anche se non erano giustificati nel loro riferimento ontologico forte.

Tradizionalmente si usa presentare la logica intuizionista direttamente attraverso la sospensione del TE. Questo modo non rende completamente giustizia al lavoro di Brouwer. In questi seminari ho preferito allungare la strada, passando attraverso l'indebolimento delle leggi di monotonia dei valori di verità, non solo per renderla meno erta, ma anche per far capire in modo più intuitivo che, se un "terzo" è introdotto in questa logica dalla sospensione del TE, questi non è un valore di verità nuovo, diverso dal vero e dal falso, ma proprio la funzione del tempo epistemico. Che impone alla logica di trottare a un certo ritmo che non è quello del posapiano ossessivo, che non arriva mai a concludere. Per guadagnare la verità occorre affrettarsi, tanto più quanto più si è vicini ad essa, insegna Lacan nel *Tempo logico*. La versione positiva della resistenza è l'accelerazione. Newton ha definito la forza che vince la resistenza della massa come una quantità proporzionale all'accelerazione. Qui, invece di masse materiali, si spostano masse epistemiche. Ma il discorso è improntato allo stesso meccanicismo della fisica. La fretta di concludere porta a concludere, partendo dall'incertezza. Il processo è a retroazione positiva.

Il tempo epistemico è una funzione essenziale e specifica della pratica analitica. Il sapere inconscio è un sapere che non si sa ancora di sapere. Si viene a sapere durante un certo lasso di tempo, il quale è scandito da acquisizione epistemiche successive. Modelli di questa successione di stati epistemici diversi sono la semantica di Kripke o la sintassi di Beth, che "pela" una formula nelle sue trascrizioni più semplici (dotate di un numero inferiore di operatori). In psicanalisi pure si pela la cipolla, man mano che, incontrando resistenze sempre maggiori, ci si avvicina a quel che Freud in gergo medico chiama impropriamente "nucleo patogeno". Le resistenze trasformano il tempo cronologico in epistemico. Al di là della loro infelice presentazione antropomorfa, le cosiddette resistenze rappresentano tappe del sapere.

Digressione prima sui rapporti con il maestro

Cade qui opportuna una precisazione sui rapporti con il maestro. Non c'è dubbio che Freud sia il maestro assoluto della psicanalisi. L'ha addirittura inventata. Ciò non toglie che nelle sue formulazioni esistano delle pecche. Le quali non vanno conservate gelosamente all'interno di un'asfittica ortodossia. La scienza moderna, a differenza dell’antica, è autocorrettiva. Sarebbe dimostrazione di oscurantismo culturale non volere correggere gli errori dei maestri per il timore di sminuirne l’autorità.

Esemplare la correzione sul tempo. Per Freud l’inconscio è una struttura senza tempo. Freud non si accorge, complice la sua impreparazione filosofiche, che una struttura senza tempo diventa automaticamente un’idea platonica. Giustamente Lacan corregge Freud introducendo il tempo nell’inconscio. Sbaglia solo terminologia. Lo chiama tempo logico. Senza precisare che la logica dell’inconscio è una logica epistemica. Perciò l’ulteriore correzione porta a introdurre nell’inconscio la funzione del tempo di sapere, giusta la struttura dell’inconscio che è un sapere che non sa ancora di sapersi, ma che si saprà *nachträglich*, dopo l’analisi

Digressione seconda sull’antropomorfismo

Nella mia pratica teorica, da intellettuale con formazione matematica, mi dedico da parecchi anni a semplificare la metapsicologia freudiana. Un modo per attuare la semplificazione è sospendere i termini antropomorfi di cui il testo freudiano pullula. I conflitti, le resistenze, le difese, le rimozioni, non meno dei termini medici, dall’eziologia all’osservazione clinica, si possono ridefinire in termini che non facciano intervenire “il piccolo uomo dentro l’uomo”. Secondo la concezione antropomorfa l’inconscio sarebbe un piccolo io dentro l’io, che fa le cose all’insaputa dell’altro io: lo sgambetta, gli fa fare dei lapsus, lo fa innamorare delle persone sbagliate, gli fa fare scelte lavorative fallimentari, insomma si diverte alle sue spalle.

Questo aspetto “umoristico”dell’inconscio c’è, è quotidianamente evidente e non lo si può negare. Dico solo che la teoria freudiana è, per i miei gusti, troppo antropomorfa, ossia troppo poco scientifica. Un modo per realizzare il programma di “disumanizzazione” della metapsicologia è attraverso gli algoritmi della logica epistemica. I quali attaccano l’antropomorfismo freudiano dalla cima, cioè dal termine inconscio. La coscienza, come si è visto, non è altro che il raddoppiamento dell’operatore epistemico: sapere di sapere, dimostrare la dimostrabilità. La divisione tra conscio e inconscio è semplicemente il non sussistere per certi operatori della legge di idempotenza, come si vedrà più avanti per l’operatore del desiderio. Certo, questo lavoro di deantropomorfizzazione rende giustizia, se condotto bene, anche ai termini antropomorfi, riducendoli a quel che sono: metafore. Che hanno reso un buon servizio ai tempi di Freud, ma ora hanno fatto il loro tempo ed è giunta l’ora di sostituirli con un discorso un po’ più rigoroso.

Allora, invece di parlare di resistenze, preferisco parlare di attraversamento di un modello in tempi più o meno rapidi. La formulazione più meccanica suona alle mie orecchie più convincente. Per i motivi sopra esposti a proposito dell’indebolimento. Il meccanicismo, che implica meno vincoli, meno presupposti e meno forti dell’antropomorfismo, ha portata più generale. Lo stesso Freud sembra averlo capito quando, dopo il 1920, mette in campo pulsioni afinalistiche e insensate, addirittura senza oggetto apparente, come la pulsione di morte. Nel secondo Freud è attivo un implicito ritorno a Cartesio, anche se esplicitamente Freud non frequentò mai Cartesio. Gli preferiva Kant.

Tre prigionieri e una via d’uscita

L’intreccio di esitazione, fretta e certezza è reso in modo suggestivo dall’analisi lacaniana del rompicapo dei tre prigionieri. Lo riprendo brevemente solo per mostrare la potenza dell’algoritmo semantico di Kripke. I dati del problema sono noti. Il direttore del carcere mostra a tre prigionieri tre dischi bianchi e due neri e appiccica tre dischi bianchi sulle loro schiene, promettendo la libertà a chi argomenti in modo logico il colore del disco che porta sulle spalle.

Il sapere del prigioniero 1, non necessariamente il primo, è rappresentato dallo s.e.

$$\Gamma^1 \models b_2, b_3,$$

in quanto egli vede i due compagni bianchi e suppone se stesso nero (la supposizione è scritta non scrivendo b_1). Può dire di essere nero? Non ancora. Deve controllare gli stati epistemici dei compagni. I quali esitano. Se avessero visto in lui un nero, non avrebbero esitato (perché?). Quindi nel loro stato epistemico, lui non rientra come nero. Il modello completo è allora

$$\Gamma^1 \models b_2, b_3$$

$$\Gamma^2 \models b_1; \qquad \Gamma^3 \models b_1.$$

Ma il modello falsifica la congettura $\Gamma^1 =| \, b_1$, perciò il primo prigioniero deve essere bianco… come gli altri. Essendo la situazione a simmetria ternaria, tutti e tre i prigionieri si precipitano verso la libertà. Chi di loro a questo punto dubitasse, perderebbe definitivamente la certezza che ha acquisito attraverso il dubbio, fa notare acutamente Lacan.

Il modello di logica epistemica è anche un modello di legame sociale. Il non sapere dell'altro ritorna in me attraverso la sua esitazione come sapere. Il risultato di psicologia collettiva, che sarebbe piaciuto a Freud, è che la mia libertà dipende dall'altro. *Se sei libero, scegli*, dice il paradosso di Kierkegaard. Che ora sembra meno paradossale, in quanto significa che non si è liberi da soli. Scegliere un modo di restituire all'altro il dono della libertà che ti ha fatto. Si tratta di un caso esemplare di legame sociale epistemico, veramente democratico ed egualitario, retto non dall'identificazione a qualche leader, a qualche maestro, a qualche padre, ma dal sapere collettivo. Impossibile fuori dai rompicapi matematici? Forse no, se si tiene conto che la logica, più che un riferimento a ideali astratti e intelletttualistici, mette in azione un sapere collettivo effettivamente distribuito in una comunità, il *Denkkollektiv* di Fleck. La logica non è un fatto esclusivamente individuale. Non nacque, armata come Atena dalla testa di Zeus, dalla testa di Aristotele, come immaginava Kant. È sin dall'inizio di tutti ed evolve insieme a tutti. Se oggi siamo arrivati all'indebolimento binario il merito è un movimento di pensiero – il pensiero debole – che ha spinto in quella direzione, quasi animato da una pulsione collettiva, non da oggi.

Durante questi seminari vi ho costretto a un lungo volo nel tempo da Aristotele a Boole, da Leibniz a Frege, da Filone a Gödel. Spero che sia riuscito a mostrarvi che la logica, come la matematica, non è il risultato della contemplazione disincarnata di entità platoniche, ma è il frutto del lavorio intellettuale di uomini come noi che hanno costruito un pensiero, non facendolo scendere dall'Iperuranio sulla terra, ma elaborandolo a partire da osservazioni quotidiane. In particolare la matematica nasce dall'osservazione che l'uomo può fare sul proprio stesso fare: contare, disegnare, rappresentare. Mai il carattere immanente dell'attività matematica è venuto meno, benché ideologicamente sia poi stato nobilitato con riferimenti extraterrestri del tipo delle idee platoniche. Ma il vero Iperuranio delle idee platoniche è qui in terra: è la comunità, depositaria del sapere sulle pratiche per produrre beni materiali, spirituali, nonché altro sapere.

Logica poco categorica, poco ontologica, poco intensionale

La logica debole ha tra gli altri questo grande merito: di far decadere il riferimento all'Uno, cioè all'ontologia henologica. La mia opinione è che essa riesca in questa performance perché convoca sulla scena l'infinito, che è un oggetto non categorico, non riducibile all'Uno concettuale o intensionale.

Il termine "categorico" è un termine tecnico della logica matematica. Indica una struttura i cui modelli o presentazioni sono da un certo punto di vista tutti equivalenti. Un triangolo è una struttura categorica in quanto, scaleni, isosceli, rettangoli, si riducono tutti alla struttura: tre vertici e tre lati. Ma l'infinito non è categorico. Possiede modelli non equivalenti. Il modello numerabile non è equivalente al modello continuo, perché il secondo è più "numeroso" del primo. Perciò l'infinito non può essere pensato come uno, ma deve essere pensato al plurale, di volta in volta come numerabile, come continuo o ancora più numeroso. Facendo venir meno l'Uno, l'infinito indebolisce automaticamente l'ontologia. Che statuto ontologico hanno gli infiniti grandi? Certo inferiore a quello degli infiniti piccoli, gli infiniti di tutti i giorni del contare e del disegnare. Ma, di fatto, con la loro poca esistenza gli infiniti grandi gracilizzano retroattivamente l'ontologia dei piccoli. Come ho già annunciato, il punto è che la non categoricità dell'infinito rende precari gli strumenti concettuali o intensionali. Dell'infinito non si può dire com'è. Non si può definirne in modo completo l'ontologia, pur potendosi dire qualcosa attraverso certi modelli. Non è mistico ineffabile, l'infinito, ma neppure risolubile senza residui nel concetto. Ciò rende ineliminabile il ricorso a strumenti espressivi a prima vista più deboli, come quelli estensionali, insiemistici, apparentemente quantitativi e poco qualitativi. Ma la perdita apparente di finezza espressiva – non si può dire in logica estensionale che "Elena è una rosa", non essendo l'enunciato né vero né falso, o meglio vero e falso, contro il principio di bivalenza – è controbilanciata dalla possibilità di trattare l'infinito, che è un argomento non meno affascinante, anche se meno odoroso, del fiato dell'amata. A livello dell'infinito la contrapposizione pascaliana tra *esprit de géométrie* ed *esprit de finesse* perde parte della sua pertinenza. Di fatto anche Pascal, concependo la rinomata scommessa, dovette reintrodurre un po' di geometria – sotto forma di infinito – nella finezza.

(torna alla home)