# Cartesio, Freud, Brouwer
## Verso un'epistemologia dell'inconscio
di Antonello Sciacchitano

A pensarci bene, in logica classica il falso si coglie solo come l'inverso della verità; il falso designa la verità altrettanto bene.
J. Lacan, *L'Etourdit*

## Primo seminario

Monza, 27 settembre 2003

*Introduzione*

Ringrazio il prof. Italo Carta e il dott. Fulvio Cassani per avermi invitato a parlare all'Università degli Studi della Bicocca di Milano. Leggo sui giornali che è un'Università prestigiosa. Sta in cima alla classifica ministeriale dell'efficienza. Mi piace pensare che rientri nell'efficienza di questa Università anche il fatto di invitare uno psicanalista, che non è accademico, né legato a istituzioni o lobby psicoterapeutiche, a parlare di matematica, in particolare di logica, all'interno di una scuola di specialità in Psichiatria.

Prima delle vacanze Fulvio mi chiese: "Perché non fai qualcosa per noi?". Pensai a un'esperienza che avevo alle spalle: un seminario tenuto tre anni fa a Zurigo. Allora fui invitato a parlare su un argomento specifico, anzi molto ristretto, cioè sulla questione del perché Jacques Lacan nella sua teoria psicanalitica abbia fatto tanti riferimenti alla matematica. Tenni un seminario di due giorni che andò bene e sta per essere pubblicato in Svizzera. Riflettendo a quell'esperienza mi resi, però, conto che non era esportabile (o reimportabile) tale quale qui a Monza. Innanzitutto quell'argomento non mi interessa più e forse interessa ancora meno voi. Oggi non mi interessa stabilire perché Lacan abbia fatto tanta matematica, o meglio pseudomatematica. Mi sono fatto delle idee in proposito, che credo interessino molto poco a psichiatri in formazione. Allora ho deciso di impostare un seminario a più largo respiro, cercando innanzitutto di riorganizzare il mio sapere, riarchiviarlo, farne, come si dice in computerese, il *reset*, e, in secondo luogo, tentando di offrire a giovani in formazione come voi l'occasione di aprire la mente a certi argomenti, che probabilmente non vi sono familiari. La maggior parte di voi viene da Medicina. Chi sceglie medicina – si sa – lo fa perché non c'è matematica. Questo è un fatto deplorevole che va contro la tradizione della medicina stessa. I medici rinascimentali erano dei bravi matematici. Il rinascimento italiano – questo non è noto a molti – pullula di bravi matematici, che formano la schiera dei cosiddetti umanisti matematici, di cui facevano parte i Luca Valerio, i Guidubaldo dal Monte, i Francesco Maurolico, lo stesso Galileo Galilei, Bonaventura Cavalieri ecc. In particolare i medici rinascimentali erano costretti a essere bravi matematici perché erano anche astrologi. Facevano le loro prognosi mediche interrogando gli astri, quindi dovevano avere nozioni di geometria e di calcolo. Cardano, medico di Pavia, è noto per aver scritto un'*Ars Magna*, dove svelava il segreto della soluzione per radicali dell'equazione di terzo grado, secondo una formula a lui confidata – in un pessimo sonetto – da un certo signor Tartaglia di Brescia. Ruffini, medico di Modena, di cui forse qualcuno ricorda la regola per dividere un polinomio, scoprì in contemporanea con Abel il teorema di non risolubilità per radicali dell'equazione generale di quinto grado. La tradizione dell'accoppiamento matematica-medicina arriva, seppure assottigliata, fino ai nostri tempi. In Italia abbiamo avuto un Gustavo Barbensi, che studiò statisticamente la variabilità biologica. Mi risulta che a Medicina esista un corso di Biometria. Non so se è obbligatorio. Lo chiedo perché ai miei tempi – da giovane ho insegnato in quel corso – non lo era. Che oggi sia diventato obbligatorio, mi fa solo piacere.

*Matematica, lavoro collettivo*

Qui a Monza affronterò la questione della matematica – in medicina, in psichiatria, in psicanalisi – dal punto di vista della logica. Perché interessarsi di logica, venendo dall'esperienza psicanalitica? mi chiederete. Non lo so dire molto bene. Forse alla fine del Seminario sarà più chiaro sia a me sia a voi. In prima battuta posso dire che la logica pone la questione del *logos*, della funzione della parola come fattore di verità. Lo psicanalista lavora con la parola e la verità del soggetto, quindi non può non fare della logica. Ma, se lo psicanalista è freudiano, sa bene quanto diceva Freud nel V capitolo del *Compendio*: "L'inconscio è il regno dell'illogica". Io nella vita, oltre alla cura dei pazienti, mi dedico – anima e tutto il resto – a Freud. Voi non sapete così bene come lo so io quanto sia difficile convivere con i geni. Freud era un genio. In quanto tale ha detto un sacco di sciocchezze in ben settemila pagine di scritti, senza contare le lettere. Questa dell'illogica è una di quelle. I geni ci fanno pagare la loro genialità con una serie quasi infinita di sciocchezze. Niente di male. Le sciocchezze sono come i falsi positivi a un test di prevenzione del tumore. Più è sensibile il test, più è capace di svelare tumori allo stato iniziale, più produce falsi positivi. Ma differenze dei falsi positivi, che si buttano semplicemente via, le sciocchezze, è meglio correggerle. Io mi dedico a correggere le sciocchezze di Freud con Freud. Non mi sogno, come va di moda, di superarlo. Una delle correzioni che mi autorizzo a fare al genio di Vienna è proprio questa: "L'inconscio ha una logica". Non è quella che usiamo tutti i giorni, ma è una logica con una sua dignità e una sua struttura. Non vale solo la pena studiarla, ma è anche divertente, come spero di farvi vedere.

L'argomento "logica" trasporta con sé una grossa dose di ambiguità. Voi forse non lo sapete, perché non siete della mia generazione. Ma nella mia ho incontrato dei signori molto rispettabili – sto pensando a un direttore di ricerche di farmacologia clinica di un'industria farmaceutica multinazionale – che mi hanno detto: "Guardi, dottore, lei con me può parlare quanto vuole di logica, ma di matematica…" Voleva dire: "…non ne voglio sapere". Di solito si copre la volontà di ignoranza con l'idiosincrasia per le formule: "Per me le formule sono come il cinese". Giusto, cinese e matematica sono entrambe scritture ideografiche. Evidentemente, tra le molte cose di cui gli ignoranti, per lo più di formazione umanistica, non vogliono sapere c'è proprio questa, che la logica oggi o è matematica o non è logica. La logica senza matematica, sia la logica sillogistica aristotelica o la logica dialettica hegeliana, non ha più corso. La logica, inventata da un filosofo, ebbe il destino segnato: convergere verso la matematica. In certi passaggi è stata una convergenza riottosa, addirittura ci sono stati momenti in cui la logica ha tentato di prendere il sopravvento sulla matematica, programmando la riduzione di tutta la matematica a logica – con Frege e Russell – ma alla fine la logica ha dovuto cedere le armi: ha dovuto scegliere tra diventare matematica o perire. Se oggi parliamo di logica, evidentemente, è perché ha scelto di non perire. Merito di chi la scelta? Merito del collettivo dei matematici. Qui si apre un discorso importante che si riassume nello slogan: "Non basta essere intelligenti per fare matematica". Mi spiego con un esempio.

Nella dispensa che ho fatto circolare c'è un titolo: "Per un'epistemologia del sapere inconscio". Chi di voi è interessato all'inconscio dovrà avere la pazienza di aspettare di arrivare almeno alla metà di questa serie di incontri prima di sentir parlare di inconscio. Prima dovrò perdere tempo in preliminari che, secondo me, non sono meno divertenti dell'inconscio stesso. Vi preannuncio, però, che, arrivati al punto dell'inconscio, ci accorgeremo che avremo sempre e solo parlato di lui. "Avremo parlato", al plurale, dicevo. Ecco il punto cruciale. Non si può fare matematica da soli, come non si può fare l'autoanalisi. Per fare analisi bisogna essere almeno in due. Lo stesso per la matematica. La matematica è una pratica collettiva. Non è solipsistica, non la si può fare da soli, la matematica, anche se si è molto intelligenti e dotati. La prima eco che ho avuto della distribuzione della dispensa è che è incomprensibile. Non mi sorprende. È rimasta incomprensibile perché avete cercato di comprenderla da soli, sulla base del solo testo. "I testi", come diceva Platone, credo nel *Fedro*, "maestosamente tacciono". Non dicono nulla. Sono lettera morta. Anche per me ci sono settori della matematica che non mi dicono nulla: la matematica delle categorie, per esempio, mi sembra sommamente astratta e senza applicazioni. Perché? Perché l'ho studiata da solo sui libri. Se l'avessi praticata con qualcuno, mi spiegava quest'estate un esperto di categorie, oggi non darei questo giudizio. La matematica richiede intelligenza, sì, ma collettiva. Non si fa al di fuori di un legame sociale. Esattamente come ogni pratica scientifica, psicanalisi compresa.

Provo a dirlo con un riferimento etimologico. “Matematica” deriva dal verbo greco *manthano*. Esso ha una pluralità di significati, che si ripartiscono in due grosse classi: la prima è “imparo”. La matematica è una cosa che si impara: la si ap-prende, la si prende dall’altro. La seconda serie di significanti ruota intorno a “com-prendo”. “Capisco” viene dal latino *capio,* afferro – con questo gesto della mano. In comune le due classi hanno il “prendere”. Si prende, si afferra, magari con violenza, qualcosa dall’altro. Il sapere, matematico o psicanalitico, è qualcosa che si coglie, si cattura, pescando nella circolazione sociale e comunitaria del discorso, rispettivamente matematico e psicanalitico, loro incroci compresi. La connessione tra matematica e psicanalisi è epistemica: si realizza attraverso il sapere. Sapere circolante, notate, non ancora definitivamente acquisito. Il sapere della matematica non è un sapere enciclopedico, già fatto – per quello c’è il sostantivo greco *episteme* – ma è sapere nel suo divenire temporale, in via di acquisizione. Esattamente come il sapere che si acquisisce durante un processo analitico. L’invito che oggi faccio a voi è di ap-prendere parte del sapere che passa attraverso di me; vi prego di mettervi in posizione di rapina per non lasciarvi sfuggire qualcosa che neppure io so da dove viene, ma che vi trasmetto inconsciamente.

Non sto dicendo nulla di nuovo. Freud e Lacan lo sapevano bene e si esponevano in pubblico per farsi rapinare del loro sapere. Lacan durò ben cinque lustri nell’attività seminariale. Gli scritti erano per lui un risultato collaterale della pratica di parola orale. Analogamente i nostri cinque incontri saranno il momento collettivo di cui voi stessi sarete gli attori protagonisti. Io sono un deuteroagonista. Faccio da sponda perché rimbalzi su di voi e voi l’afferriate il sapere che io ho acchiappato da qualche altra parte. La cooperazione, l’amicizia, la *filia* sono l’esca che permette di acchiappare il sapere. In analisi è evidente. Il processo analitico procede attraverso la *filia*, a volte falsa, attraverso il *feeling*, a volte ingannevole, del transfert. Freud lo dice negli Studi sull’isteria: “Il transfert sul medico avviene per falso nesso”. Ma vero o falso che sia, il transfert serve. Serve a procedere, a volte a resistere all’analisi.

Parlando di lavoro collettivo introduco subito una valenza politica. Né la matematica né la psicanalisi si fanno in una torre d’avorio. Per la matematica è evidente. L’applicazione della matematica fa girare il mondo della produzione. Il capitalismo sa bene che la matematica è una faccenda collettiva. La mia posizione particolare è che la matematica è anche una scuola di democrazia. È democratica perché non opera con verità rivelate e depositate tutte, una volta per sempre, in un libro, in un catechismo o in una Bibbia. Le verità matematiche sono costruzioni collettive, spesso faticose. Il calcolo infinitesimale si costruisce durante tre secoli grazie contributi diversi, inizialmente imprevedibili, talvolta fallaci, provenienti da intelligenze disperse nel mondo: Inghilterra, Francia, Germania, Italia, Russia. (Stranamente mancano all’appello la penisola iberica e la Romania, un tempo le ali dell’impero romano, territori dove l’influsso della civiltà latina si è fatto particolarmente sentire e si è rivelato duraturo, soprattutto nella lingua). Le verità matematiche non si applicano secondo i dettami di qualche maestro che propina agli allievi la sua ortodossia. In matematica non ci sono scuole, come purtroppo ci sono scuole di psicanalisi. Mi correggo. Le scuole di matematica sono comparse in momenti critici o di difficoltà o di stagnazione: o quando si stentava a riconoscere l’emergere di una novità sconvolgente, come ai tempi della diatriba tra Leibniz e Newton sul calcolo infinitesimale, o quando si temeva il crollo dei fondamenti, come ai tempi dell’invenzione della teoria degli insiemi di Cantor, minacciata dalle cosiddette antinomie. All’inizio del secolo scorso ci fu una contrapposizione, anche violenta, tra due scuole: l’intuizionista e la formalista. Oggi se ne parla come di un ricordo spiacevole. Lo scontro tra Brouwer intuizionista e Hilbert formalista vive solo nei libri di storia. La blindatura scolastica della matematica è infeconda, esattamente come la blindatura della psicanalisi. Essa non ha portato in generale a risultati utili per lo stesso sapere matematico. La matematica è una pratica collettiva ma decisamente non scolastica. È una pratica di confronto tra diverse intelligenze che cooperano tra di loro liberamente, non imbottigliate in un recinto scolastico.

Purtroppo, la vostra esperienza di matematica proviene dal recinto scolastico. Perciò la maggior parte di voi ha buone ragioni per odiarla. Io, come molti di voi, ho dovuto imparare a memoria le formule così come erano scritte sul libro, a pappagallo. Alle medie inferiori avevo tre in matematica perché non sapevo ripetere la proprietà distributiva dei numeri. *A posteriori*, dopo tanti anni, riconosco che quel tre era ben meritato, perché ho constatato di persona che la proprietà distributiva è il cardine dell'algebra moderna e ben faceva la prof a pretendere che l'imparassi a memoria.

*Un teorema, più dimostrazioni*

Oggi continuerò a parlare un po' di tutto e un po' di niente. Il primo incontro è introduttivo al lavoro che segue. Poiché sarà un lavoro collettivo, dobbiamo anche imparare a conoscerci. Voi dovete imparare a conoscere quelli che vi sembrano miei tic mentali, un po' bizzarri, un po' inquietanti, un po' extraterrestri. Io devo imparare a riconoscere le vostre resistenze al sapere, come in genere deve fare un buon analista. Perciò il primo incontro sarà, come si dice, preliminare. E sarà anche *soft*. La prenderò alla larga.

Voglio presentarvi un esempio, che ritengo semplice ma anche utile per illustrarvi quanto sto dicendo, organizzandolo intorno a una caratteristica, secondo me peculiare della matematica. *La matematica si può fare in tanti modi*. Questa è una caratteristica morale, prima che scientifica, della pratica matematica. Quando vi capiterà di sentire qualcuno che dall'alto del suo scanno imbonisce il popolo con locuzioni del tipo: "Non c'è altra soluzione", oppure "non si può fare altrimenti", oppure "la sola via che porta al risultato è", oppure "la situazione richiede una cosa sola", ricordatevi di quanto vi sto dicendo: "Quell'uomo non è un matematico. Sarà un santo o un arruffapopoli, sarà la fortuna o sfortuna della sua gente, sarà quel vorrà la storia, ma certamente non è un matematico". La matematica non è per "l'"uno" ma per "il molteplice". Non è per la dittatura, ma per la democrazia. Perciò si resiste tanto volentieri alla matematica, perché l'uno è più riposante del molteplice. L'Italia ne sa qualcosa. Oggi, come in passato, non siamo governati da matematici.

Se la logica è matematica, anche la logica, quindi, si può fare in tanti modi. Non esiste *il* modo privilegiato, quello giusto, di farla. Ci sono modi che in certi casi vanno meglio di altri, per esempio ci sono modi che più comodi per dimostrare teoremi *di* logica e ce ne sono altri che rispondono meglio al compito di dimostrare teoremi *sulla* logica, o metateoremi. Poi ci sono modi che piacciono più di altri a chi fa logica. Io stesso preferisco fare logica attraverso regole invece che attraverso assiomi più regole. In un certo senso vi obbligherò a condividere le mie idiosincrasie. Ma dovete sapere che per me è più semplice presentare le mie idiosincrasie. Il vantaggio per voi è che sarò più chiaro che se fossi costretto a presentare la logica in modi a me poco appetibili. Questa è una delle ultime e non minori conseguenze di come la matematica si possa fare in tanti modi.

Per quale ragione vi illustrerò questa possibilità su un esempio storico concreto? Perché durante questi incontri farò della logica, quindi della matematica, in almeno due modi. La logica si può fare in tanti modi. Neppure io so precisamente quanti, ne conosco almeno cinque. Di questi ve ne presenterò due. Degli altri vi dirò solo che esistono, tanto per farvi capire che in matematica non esiste il codice di riferimento assoluto – ortodosso – ma esistono tante pratiche che non sono eterodosse per il solo fatto di essere diverse.

L'esempio che vi presento è legato alla tavola pitagorica. Tutti voi la conoscete, magari vi ricorda i pianti per i numeri che non riuscivano mai giusti, un po' come i numeri del lotto, ma non tutti di voi sanno che la tabellina pitagorica non è del signor Pitagora. La tabellina pitagorica è di un certo signor Nicomaco, lui sì pitagorico, matematico palestinese, vissuto tra il primo e il secondo secolo d.C. Che la costruì per sistemare la questione della moltiplicazione, un compito all'epoca non banale. A noi oggi sembra banale moltiplicare due numeri. Ma per gli antichi Greci fare dell'aritmetica non era facile come a dire. Per loro era più facile fare della geometria. Ancora oggi si sente dire: "A scuola ero bravo in geometria, ma l'algebra mi faceva schifo, sbagliavo sempre i calcoli". In questi discorsi ci sono ragioni che vanno al di là dell'individuo. La discrepanza tra aritmetica e geometria ha antecedenti storici.

Nel caso di Nicomaco funzionava una ragione strutturale. I Greci… i Greci… noi pensiamo grazie a loro. Se i Greci non avessero cominciato a pensare, non saremmo qui a tenere questo seminario. I Greci inventarono il pensiero ma non la scrittura dei numeri. Per scrivere i numeri usavano le lettere del loro alfabeto. Ma non era ancora un calcolo letterale di tipo algebrico il loro. La lettera alfa non significava qualsiasi numero ma il numero uno, beta il numero due, con un apice l'uno diventava dieci, il due venti, con due apici l'uno diventava cento e così via. La scrittura numerale greca era decisamente poco trasparente. Per il Greco, quindi, era più facile pensare la misura, il rapporto tra lunghezze, aree e volumi piuttosto che calcolare effettivamente la singola lunghezza, area, volume mediante numeri. Dopo tutto il rapporto si rappresenta a meno di una costante di proporzionalità: due terzi è come quattro sesti o sei noni. In fondo, il rapporto è largamente indipendente dai numeri che lo rappresentano. Ma il numero concreto, il numero cinque per esempio, poneva loro problemi di rappresentazione. Sapevano rappresentarlo come una successione di cinque segmenti uguali o convenzionalmente con la lettere epsilon. Insomma, la rappresentazione greca del numero era indiretta, a molta distanza dalla cosa numerica, a volte addirittura impossibile. Come rappresentare 555 in notazione greca? Non è facile. Per questa ragione l'aritmetica greca è tardiva rispetto alla geometria. Euclide sistema la geometria greca nei tredici libri dei suoi *Elementi* intorno al 250 a.C, raccogliendo risultati che risalgono a secoli prima (Talete VI secolo a.C., Eudosso IV secolo a.C. ecc. In un certo senso è un'opera collettiva). Non è che manchino risultati numerici negli *Elementi*. Euclide presenta la prima ineccepibile dimostrazione dell'infinità dei numeri primi, ma nel suo testo i numeri sono rappresentati come grandezze geometriche. Anche le teorie pitagoriche dei numeri "figurati" (triangolari, quadrati, pentagonali, piramidali, cubici ecc.) è solo una variante della geometria. L'aritmetica, intesa modernamente come teoria dei numeri, è tardiva. Nasce dopo Euclide con Eratostene – quello del crivello dei numeri primi – e fiorisce in periodo alessandrino con i Nicomaco (I secolo d.C.) e i Diofanto (II secolo d.C.).

Storicamente si congettura che i Greci abbiano acquisito la scrittura dei numeri dagli Egizi con cui commerciavano. I quali usavano i geroglifici della loro scrittura, cioè ancora dei segni letterali, non solo fonetici ma anche ideografici, per indicare numeri. Trovate qui la conferma di quanto dicevo prima in versione negativa. La matematica non è una pratica solitaria. Si fa insieme ad altri, a volte mutuando dagli altri non i pregi ma i difetti. Facendo dell'aritmetica a scopi commerciali, i Greci ereditarono dagli Egizi la scrittura alfabetica che non è il massimo della vita per rappresentare i numeri. Ciononostante, essendo intelligenti, i Greci riuscivano a pensare, a concepire il numero. Un trattatello di Archimede, intitolato *Arenario*, presenta un modo – praticamente corrispondente alla nostra elevazione a potenza – per trattare numeri molto grandi.

(*Entra il professor Carta*).

Nicomaco tenne viva la tradizione pitagorica di fantasticare sui numeri. La tradizione pitagorica sfociò ben presto nell'astrologia e nella numerologia, forse aiutata dalla notazione letterale dei numeri. Essendo scritti con lettere i numeri si potevano leggere come parole e viceversa le parole come numeri. La mantica dei sogni di Artemidoro è basata sull'intercambiabilità parola/numero. Così Pitagora parlava della divina *tetractis*, la quadrupla dei primi quattro interi che dava come somma dieci, simbolo del Tutto, essendo dieci il numero delle dita. Nicomaco, invece, distilla la parte scientifica del pitagorismo. Non si rivolge ai singoli numeri ma al loro insieme. Non è scientifico, infatti, elucubrare strampalate proprietà sul numero tre, simbolo della perfezione e della divinità. È scientifico fare la teoria su infinità di numeri. Sulle connessioni tra infinito e scienza tornerò fino a stufarvi. Qui ce n'è una, uno delle tante, una delle più semplici, ma non per questo meno importante. Fu proposta da Nicomaco. Riguarda i numeri dispari, cioè i numeri della forma $2h\pm1$. Questa proprietà concerne tutti i numeri dispari, ripeto, non solo i primi tre o quattro. Eccola:

1 è un quadrato, perché $1.1 = 1$.

1 più il successivo numero dispari, cioè 3, dà un quadrato, perché 1+3 = 4 = 2.2.
4 più il successivo numero dispari, cioè 5, dà un quadrato, perché 4+5 = 9 = 3.3.
La regolarità nicomachea sembra continuare all'infinito:
9+7 = 16 = 4.4.
16+9 = 25 = 5.5.
…

I puntini stanno per infinito. I Greci non disponevano di una buona rappresentazione dei numeri, quindi a maggior ragione non sapevano rappresentare bene l'infinito. Noi, pur avendo una migliore notazione per i numeri finiti, con l'infinito ci troviamo a mal partito esattamente come i Greci. Dobbiamo accontentarci dei puntini di sospensione. L'impossibile non ci ferma. È impossibile rappresentare l'infinito con simboli finiti. Lo rappresentiamo alla bell'e meglio con i puntini di sospensione. (Ricordate questa parola: *sospensione*; tornerà!). Tanto ci basta per andare avanti.

Cosa sta facendo Nicomaco? Sta congetturando un teorema: *la somma dei primi numeri dispari è un quadrato*. A questo stadio il teorema non è ancora un teorema con tutti i crismi, perché non è dimostrato. È solo una congettura: una verità potenziale, attualmente vera o verificata per pochi numeri interi. Ma noi azzardiamo che valga per tutti gli infiniti numeri. La congettura ha un'importante funzione nella pratica matematica. Anticipa una verità che si saprà poi se è veramente vera o falsa. L'inconscio fa lo stesso. Anticipa una verità, con un sogno o con un lapsus, il cui significato si verrà a sapere *a posteriori*, dopo decenni di psicanalisi e tanti soldi versati all'analista. In ogni caso è importante formulare una congettura – una cosiddetta ipotesi di lavoro, non importa se vera o falsa – altrimenti non si guadagna alcuna verità. Avviene come in analisi, dove è importante formulare la congettura che l'analista sappia il tuo desiderio inconscio, altrimenti l'analisi non decolla. La congettura del soggetto supposto sapere, *a posteriori* dimostrabile regolarmente falsa, inaugura il transfert, il falso nesso sul medico, come dice Freud negli *Studi sull'isteria*. Ma il passaggio attraverso il falso è inevitabile se si vuole condurre in porto un'analisi.

Nicomaco era matematico. Cosa ci si aspetta da un matematico? "Dai Greci in poi chi dice matematica dice dimostrazione". Questo è l'*incipit* del libro dell'Euclide moderno, Nicolas Bourbaki, nome collettivo di un gruppo che ha raccolto alcuni dei più grandi matematici tra gli anni Quaranta e gli Ottanta del XX secolo. Nicomaco non delude le aspettative. Dimostra la sua congettura. La congettura è aritmetica e Nicomaco la dimostra *more geometrico*, come c'era da aspettarsi da un Greco. Vi darò la dimostrazione di Nicomaco, ma non da sola. Vi darò anche la dimostrazione di Gauss e – non rispettando l'ordine cronologico – la dimostrazione di Francesco Maurolico da Messina, matematico rinascimentale; inventore del metodo di induzione matematica. Non voglio fare sfoggio di cultura. Voglio farvi toccare con mano come la matematica si possa fare in tanti modi. In questo caso voglio mostrarvi che la stessa congettura si può dimostrare in modi diversi e indipendenti. E questo non perché i matematici siano degli ossessivi insicuri, prede ignare della *folie du doute*. Non hanno bisogno, cioè, di più prove per convincersi dell'esattezza del teorema. Una prova basta e avanza per guadagnare la certezza. Più prove sono necessarie per aprire nuovi campi di ricerca. Gauss diede quattro prove del teorema fondamentale dell'algebra, perché ogni prova conteneva un pizzico di topologia che stonava, a suo avviso, in un teorema di algebra. La topologia come branca autonoma della matematica nascerà, infatti, di lì a poco per merito dell'allievo di Gauss Bernhard Riemann.

(A proposito di allievi dovrei aprire una parentesi. Gauss, il *princeps mathematicorum*, non amava insegnare, confermando che la matematica non si fa a scuola. Trovava noioso inculcare nelle zucche di ignoranti, che volevano rimanere tali, le sottigliezze dell'algebra modulare o della geometria differenziale. Amava invece comunicare le sue scoperte per lettera agli amici. Qui si cela un sintomo sociale. La richiesta di insegnamento – oggi, di formazione – si compone di almeno due filoni complementari. Da una parte c'è l'esigenza dei padroni di conformare i propri servi ai codici della produzione, dall'altra l'esigenza degli allievi di rimanere ignoranti, mascherandosi dietro il sapere del maestri. Su ciò dovrebbero riflettere i tanti analisti che spesso montano in cattedra di improvvisate scuole di psicanalisi. Dovrebbero andare prima a… scuola di matematica, se ne esistesse una.)

La dimostrazione di Nicomaco, dicevo, è geometrica. Applica il cosiddetto metodo diagonale. Metodo che sarà riscoperto nel XIX secolo da Cantor nella dimostrazione che esistono infiniti più grandi dell'infinito numerabile e verrà utilizzata da tutti i matematici che hanno prodotto metateoremi sulla matematica, da Gödel, che dimostra l'incompletezza dell'aritmetica, a Turing, che dimostra l'inesistenza dell'algoritmo universale per decidere se un'affermazione matematica è vera o falsa. Forse vi stupirà che approfondendo un esempio elementare come la proprietà di Nicomaco si arrivi subito alle questioni dei fondamenti della matematica. Forse non vi stupisce, invece, che in una faccenda di quadrati il costruttore della tabellina pitagorica arrivi a scoprire il metodo diagonale. Dopo tutto nella tabellina pitagorica i quadrati stanno proprio sulla diagonale.

Grazie alla carenza notazionale per scrivere i numeri il greco antico si aiutava con le figure geometriche, lavorando con i cosiddetti numeri "figurati". I quadrati numerici si rappresentano proprio con quadrati geometrici. Ad esempio, 1 è un quadrato e Nicomaco lo rappresenta con un quadratino:

| |
|---|
| 1 |

Per rappresentare la somma 1+3 basta disegnare attorno al primo quadratino tre quadratini. Nicomaco fa quel che farebbe una ricamatrice con una tovaglia quadrata: "orla" il quadrato iniziale con 3 nuovi quadratini e ottiene un nuovo quadrato:

| | |
|---|---|
| | 3 |
| 1 | |

Come vedete, ho aggiunto un quadratino sul lato di destra del quadratino iniziale,

| | |
|---|---|
| 1 | |

poi ho aggiunto un quadratino sul lato superiore:

| | |
|---|---|
| | |
| 1 | |

e infine ho aggiunto un quadratino in corrispondenza dell'estremo superiore – in alto e a destra – della diagonale del quadratino iniziale:

| | |
|---|---|
| | 3 |
| 1 | |

Si procede analogamente al passo successivo, orlando il quadrato ottenuto con 5 nuovi quadratini e, come potete immaginare, si ottiene di nuovo un quadrato:

| | | |
|---|---|---|
| | | 5 |
| | 3 | |
| 1 | | |

E così via…

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 7 |
| | | 5 | |
| | 3 | | |
| 1 | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 9 |
| | | | 7 | |
| | | 5 | | |
| | 3 | | | |
| 1 | | | | |

…

Cosa garantisce che ad ogni passo si aggiunga un numero dispari di quadratini? Il fatto che si operi su due lati del quadrato precedente. I casi sono due: o il lato del quadrato è formato da un numero pari di quadratini o è formato da un numero dispari di quadratini (non si danno terze possibilità, ricordate questo punto). Ma sommando due numeri pari si ottiene un numero pari; lo stesso si ottiene sommando due numeri dispari. Alla fine il risultato è un numero dispari di quadratini, perché si aggiunge un quadratino – quello sulla diagonale – a un numero pari di quadratini. Qualche ragionevole dubbio può rimanere sulla possibilità di ottenere, continuando a orlare il quadrato, sempre e comunque un quadrato. Conserviamo il dubbio per attivare la dimostrazione successiva, che sarà finalmente aritmetica.

Credo che la dimostrazione di Nicomaco vi abbia convinto. (*Assenso*). È intuitiva. Si vede attraverso. Concediamoci, allora, un attimo di pausa prima di passare alla successiva dimostrazione. Farò un po' di storia.

La proprietà di Nicomaco è fondamentale per la scienza moderna, come vi mostrerò tra breve. Ma dopo i Greci si perse, cadde nell'oblio. Dopo i Greci non si fece più matematica. Tra i Romani che si interessavano di diritto e i Medievali che si interessavano di teologia, la matematica entrò in un periodo di stagnazione. Dopo quel che vi ho detto sullo spirito democratico della matematica, non dovrebbe stupirvi che corrispondentemente la civiltà politica abbia sperimentato regimi di convivenza autoritari. Le lotte tra papato e impero furono il vertice dell'antidemocrazia. Paragonabile all'antidemocrazia vigente nelle associazioni psicanalitiche, per esempio ai tempi delle lotte tra annafreudiani e kleiniani.

Nel tardo Medioevo, a cavallo tra il XII e il XIII secolo, compare una figura mitica di matematico, uno dei primi matematici moderni, direi europei. Si chiamava Leonardo Pisano, detto Fibonacci, cioè figlio di Bonaccio. Ha tanti meriti. Era figlio di un commerciante e, viaggiando per i porti del Mediterraneo, apprese la notazione araba per scrivere i numeri. Sua fu l'operazione culturalmente importante di importare la notazione araba dall'Oriente all'Occidente. Non fu un'operazione incruenta perché segnò la fine degli abacisti, battuti sul terreno pratico della computazione dagli algoristi, così si chiamavano coloro che operavano con l'algoritmo arabo. Fare calcoli con la notazione greca o con la ancora più cervellotica notazione romana era difficilissimo. Vi sfido a moltiplicare 45 per 32: XLV volte XXXII. Personalmente non saprei da che parte cominciare e ne verrei forse a capo dopo una settimana con il risultato sbagliato. Grazie a questa difficoltà, in linea di principio perfettamente eliminabile, era fiorita la casta professionale degli abacisti. Erano dei chierici che vivevano all'ombra dei monasteri, vendendo la loro abilità calcolistica a chi ne aveva bisogno, commercianti e regnanti. Si avvalevano di *abaci* e di pietruzze (*calculi*) per fare calcoli banali che noi impariamo alle elementari, grazie alla notazione posizionale e alla citata tabellina nicomachea. Il Fibonacci spazzò via abaci e pietruzze. Naturalmente fu osteggiato dagli abacisti, cui toglieva il pane di bocca. Sarebbe come se Freud, inventando la psicanalisi, buttasse fuori mercato gli psicoterapeuti. Dico "sarebbe", perché come sapete sono stati i chierici della psicoterapia a buttare fuori mercato la psicanalisi. Ma concettualmente il paragone rimane valido. La psicoterapia è una professione finta: tratta le difficoltà psichiche che nascono da una concezione artificiosa della psiche, artificiosa come la notazione romana dei numeri. Come gli psicoterapeuti, i chierici erano organizzati in piccole scuole che si tramandavano il sapere, senza metterlo in discussione, senza metterlo a confronto con il "fuori", senza commerciarlo ma vendendolo a usura. Insomma, i chierici non erano matematici; erano gli esponenti più bassi nella scala degli operatori culturali di una società organizzata in modo antidemocratico, fissi su posizioni rigide, destinati all'estinzione.

Dico che i chierici (come gli psicoterapeuti) non erano matematici perché non creavano tra loro un legame sociale basato sul sapere. Un matematico, se trova qualcosa, lo dice al collega, gli manda un messaggino. L'altro risponde: "Che sciocchezza! Quel che credi di aver trovato non vale in questo e in quest'altro caso". La circolazione epistemica genera un legame sociale, fatto di competizioni, suggerimenti reciproci, soluzioni e proposte di nuovi problemi. Insomma, la vita del matematico è dal punto di vista intellettuale avventurosa. Ma i chierici non amano le avventure epistemiche. A loro basta sopravvivere alle spalle di un piccolo sapere consolidato e non criticabile, che conservano gelosamente, tramandandolo di padre in figlio, di maestro in allievo. Capite perché Fibonacci fosse osteggiato per la sua innovazione algoritmica. Sarebbe – continuando nel paragone polemico – come se uno psicanalista, che non appartiene a nessuna scuola, dicesse che la psicanalisi va esposta in pubblico e non coltivata nell'*ortus conclusus* della disciplina. Sarebbe uno psicanalista veramente freudiano che si interessa di psicologia delle masse oltre, e forse di più, che di psicologia individuale. Oggi si parla tanto di globalizzazione. Anche la psicanalisi va passata al vaglio democratico del confronto pubblico e scientifico. Democrazia e scienza sono connesse da un filo sotterraneo che, se si spezza, ne soffrono entrambi: e democrazia e scienza. La terza a soffrirne è la psicanalisi.

Come dicevo, nel Medioevo la conoscenza della proprietà nicomachea dei dispari si perse. La riscoprì Fibonacci che la pose alla base del suo *Liber quadratorum*, dove dedusse teoremi meravigliosi per l'epoca. Fibonacci fu invitato alla corte palermitana di Federico II e, come allora si usava, fu sfidato dai matematici di corte, che controsfidò con problemi a loro ignoti, derivanti dalla serie di Nicomaco. Naturalmente Fibonacci uscì vittorioso dal confronto.

La storia della serie di Nicomaco non finì lì. La serie torna in epoca più vicina a noi, all'alba dell'epoca scientifica, con un nome che a voi è certamente più familiare, niente meno che con Galilei. Nello studiare il moto uniformemente accelerato, scoprì la relazione intercorrente tra tempi e spazi percorsi. Da tale relazione discende l'isocronismo del pendolo. Ma Galilei, con una specie di gioco di prestigio, riuscì a stabilire la relazione spaziotemporale del moto uniformemente accelerato, *pur non disponendo dell'orologio teoricamente esatto*, ma solo di clessidre ad acqua e a polvere, che sono dispositivi solo empiricamente esatti. Come gli riuscì il colpo di mano? Gli riuscì per via del padre, che era musicista e musicologo. Galilei sapeva come si batte il tempo in musica. Battendo ritmicamente i tempi nel rapporto costante:

1, 1, 1, 1,…

osservò che gli spazi percorsi dal mobile in caduta libera si succedevano l'uno all'altro come i dispari:

1, 3, 5, 7,…

cioè un'unità di spazio durante la prima unità di tempo, poi tre unità di spazio durante la seconda unità di tempo, poi cinque unità di spazio durante la terza unità di tempo, ecc. Da qui la relazione quadratica tra spazio ($s$) e tempo ($t$): $s = 1/2at^2$, dove $a$ è la costante di accelerazione. La mia opinione è che Galilei non avrebbe dedotto la sua legge dall'osservazione empirica, se non avesse saputo *prima* la proprietà di Nicomaco. Infatti, per lungo tempo Galilei lavorò invano alla proporzionalità della velocità rispetto allo spazio, seguendo l'ipotesi sterile di Aristotele sul moto uniformemente accelerato. (Un errore che stavo commettendo anch'io alla lavagna, tanto è radicato l'aristotelismo nell'inconscio. Non deve scandalizzare questo. È normale fare errori nella pratica scientifica ed è normale correggerli, esattamente come nella pratica analitica, dove si acquisisce il sapere inconscio attraverso l'analisi dei lapsus). Galilei si corresse grazie alla sua abilità di musico e matematico.

Il lungo *détour* dovrebbe mostrare che nel discorso scientifico c'è un sapere che circola e che, *provando e riprovando*, come dicevano gli accademici del Cimento, cioè con esperimenti pratici e correzioni teoriche, genera un legame sociale, addirittura transecolare, tra chi lo pratica. È come un fiume carsico nel tempo. Scompare millenni prima e ricompare millenni dopo tra le pagine di un Galilei, di un Cartesio o di un Freud.

La dimostrazione geometrica della proprietà dei dispari è solo *una* dimostrazione, non è *la* dimostrazione. Ricordate il ritornello: *la matematica non si fa in un solo modo*. La prossima dimostrazione è aritmetica e risale a Gauss, un genio precoce della matematica. La precocità del genio gaussiano è testimoniata da questa storiella. Siamo nei primi anni Ottanta del XVIII secolo. Gauss frequenta la *Grundschule*. Per punire la classe che era stata indisciplinata e per prendere un po' di fiato il maestro dà come castigo il compito di sommare i primi numeri naturali da 1 a 100. Tutti gli scolari si mettono a scrivere sulla loro lavagna (allora non c'erano quaderni) 1+1 = 2, 2+1 = 3 ecc. L'unico che non scrive è Karl Friedrich. Dopo un po' si alza, va alla cattedra e consegna la lavagna. Sopra c'è scritto 5050. Il maestro meravigliato gli chiede come avesse fatto a indovinare. Karl Friedrich ribatte che non ha indovinato ma pensato. Ha pensato di scrivere i cento numeri cinquanta da sinistra a destra e cinquanta da destra a sinistra, secondo il modo bustrofedico di scrittura (Gauss non sa ancora che si chiama così):

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | …, | 46, | 47, | 48, | 49, | 50, |
| 100, | 99, | 98, | 97, | 96, | …, | 55, | 54, | 53, | 52, | 51, |

Ottiene 50 coppie verticali di numeri. Ogni coppia ha somma 101. Il risultato finale si ottiene, pertanto, moltiplicando la costante per il numero delle coppie, che è la metà dei numeri dati, cioè 101 per 50, che fa 5050. Con una moltiplicazione Gauss risolse un problema che richiedeva novantanove somme. Il risultato generale per la somma dei primi $n$ numeri naturali è $n(n+1)/2$. Vedete qui un tratto caratteristico dell'operare del matematico. Il matematico semplifica e generalizza. Riduce operazioni, categorie, calcoli, taglia differenze, nel doppio tentativo di arrivare alla struttura essenziale e di estendere l'applicabilità dei suoi risultati. Ha uno stile di lavoro opposto a quello del filosofo, il quale tende a complicare il proprio discorso, accumulando distinzioni sempre più sottili che lo rendono sempre più particolare e, nelle sue intenzioni, sempre più adeguato al soggetto singolo. Noi qui seguiamo l'approccio matematico. Lo stesso discorso si può generalizzare*, mutatis mutandis*, ai numeri dispari.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 5, | 7, | 9, | …, | 41, | 43, | 45, | 47, | 49, |
| 99, | 97, | 95, | 93, | 91, | …, | 59, | 57, | 55, | 53, | 51, |

Ora la somma in verticale vale 100 ma il numero delle coppie è dimezzato, rispetto a prima, è cioè 25, perché si saltano tutti i numeri pari. Il risultato della somma è ora *quasi* la metà rispetto a prima: 2500, che è il quadrato di 50. In formule, la somma dei primi $n$ numeri dispari, ossia la somma dei dispari da 1 a $2n–1$, è $(2n–1+1).n/2 = 2n.n/2 = n^2$, come sapevamo già.

Anche questa è *una* dimostrazione, non è *la* dimostrazione. Come la precedente convince. I "trucchi" dell'orlatura del fazzoletto quadrato o della scrittura bustrofedica, corrispondente alla traccia lasciata dai buoi che vanno avanti e indietro arando il campo, sono intuitivi. Si vedono. (Io ho visto dei buoi arare un campo, forse voi no). Corrispondono a esperienze della vita quotidiana. Sono familiari, perciò danno sicurezza. La matematica dà certezza non perché faccia giocare enti ideali sempre eterni come le idee platoniche di triangolo e di numero, ma perché rappresenta in modo stilizzato la vita quotidiana. Non dimentichiamolo quando arriveremo alla logica epistemica. Lo stesso slogan: *la matematica si fa in più modi*, corrisponde a peculiarità della vita quotidiana, dove lo stesso gesto – un saluto, un bacio, un'imprecazione – può essere fatto in modi diversi e con significati diversi.

Non so se e quanto la cosa vi commuova. A me sì e tanto. Mi commuove sapere che la stessa verità può essere saputa in modi diversi, senza che ci sia un maestro che mi costringa a pensare in un solo modo e un solo libro per controllare se quel che dico è giusto. "Nessuno si faccia vostro maestro", raccomandava Gesù e insisteva: "Fate attenzione ai falsi maestri", intendendo che erano tutti falsi. Tomaso d'Aquino lo diceva ai suoi confratelli: "Non leggete un solo libro". La verità matematica non sta solo nel libro di geometria o in quello di aritmetica. Può essere saputa altrettanto bene in modo geometrico, attraverso il metodo diagonale, disegnando una figura sempre più espansa, o in modo aritmetico, senza calcolare direttamente il risultato come gli abacisti, ma calcolando come lo si può calcolare, cioè metacalcolando attraverso una modalità di scrittura arcaica, la bustrofedica. Mi piace immaginare che la proprietà nicomachea fosse nota, ma solo inconsciamente, già agli antichi scribi accadici o sumeri, gli iracheni di oggi.

La prossima dimostrazione è meno intuitiva delle precedenti e, benché più rigorosa, soddisfa meno l'intuizione e lascia una punta di insoddisfazione. È giusta, ma… Vediamo subito di cosa si tratta. Dopo la prima e la seconda dimostrazione della verità di Nicomaco ce n'è da aspettarsi una terza, una quarta, una quinta ecc. Mi fermo alla terza perché ha un valore particolare. Ricordate i puntini di sospensione nella prima dimostrazione? Volevano dire: "E così via… all'infinito". Erano un modo vago per rappresentare l'infinito. Volevano dire che andando avanti si sarebbe ottenuto sempre lo stesso risultato. Ma non escludevano la possibilità che un Genio Maligno, sul tipo di quello evocato da Cartesio nel suo argomento del dubbio iperbolico, potesse intervenire a imbrogliare le carte per numeri molto grandi, per esempio lunghi venti chilometri, come l'ultimo numero primo di Mersenne scoperto recentemente da una truppa di ragazzini, organizzando in rete i loro *personal computer*.

Il metodo rigoroso per trattare l'infinito dei numeri naturali, o infinito numerabile, fu proposto nel Rinascimento nella sua *Arithmetica* da Francesco Maurolico da Messina, figlio di un funzionario di Bisanzio trasferitosi in Italia. Sicuramente si tratta di un concetto nuovo per voi. Si chiama induzione matematica. Non è l'induzione cognitiva per cui da un numero finito di casi empirici di induce la legge generale. L'induzione matematica è un procedimento ben preciso, ignoto a Euclide, per dimostrare che una certa proprietà $P$ vale per tutti gli infiniti numeri naturali: $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$... Come si fa in un numero finito di passi a raggiungere l'infinito? L'infinito non è qualcosa che sta al di là del finito? Non è metafinito? Sull'infinito abbiamo ancora le idee confuse e per lo più mistiche, frutto di un atteggiamento ambiguo di affascinamento e repulsione. L'infinito matematico è un infinito laico. Quello numerabile è anche relativamente a portata di mano. Si raggiunge in due battute: la prima si chiama *Base*, la seconda *Passo* (o *Passo induttivo*).

La *Base* consiste nel verificare direttamente che la proprietà $P$ vale per il primo numero, di solito 1, a volte 0. Nel caso della proprietà nicomachea $P(1)$ è vera. Infatti il numero 1 è un quadrato.

Il *Passo* consiste nell'ammettere che la proprietà $P$ sia vera per il numero $n$ e nel dimostrare che vale per il successivo $n+1$. In formule, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Si legge: *Se* $P(n)$, *allora* $P(n+1)$, come spiegherò nella seconda parte della mattinata. In questo caso ammetto che la proprietà nicomachea valga per i primi $n$ numeri dispari, cioè

$$1+ 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2,$$

e cerco di dimostrare che

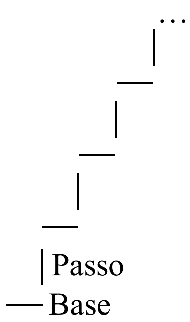
$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) + (2n + 1)$$

è ancora un quadrato. Ma questo è facile perché per il passo induttivo si può scrivere

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n-1}_{n^2} + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1.$$

Ma $n^2 + 2n + 1$ è il prodotto notevole $(n+1)^2$, che è un quadrato. Intuitivamente il *Passo* "orla" il quadrato $n^2$ e produce un altro quadrato. Qual è la differenza, allora, con la dimostrazione geometrica? Semplice. Nella dimostrazione geometrica si poteva continuare all'infinito a orlare il quadrato senza arrivare a concludere che si ottiene sempre un quadrato. Ora invece si conclude. Anche se la conclusione sembra astratta, se non circolare, perché dipende da quel $n$ che non si sa quale numero sia e per cui si ammette come vera la proprietà non ancora dimostrata, una conclusione c'è.
Andando avanti a orlare il quadrato si potrebbe incontrare un non quadrato. Il matematico non è scettico per principio su tutto, ma è scettico sulle sue possibilità. Si aspetta sempre di incontrare una contraddizione. In un certo senso Maurolico tranquillizzò i matematici. Insegnò loro a dimostrare proprietà che valgono per infiniti numeri, concludendo in un numero finito di passi, senza cadere in quel regresso infinito che dopo Aristotele avevano imparato a temere come l'equivalente della contraddizione.

Ciò non toglie che il trucco induttivo di Maurolico possieda una forza di convinzione meno immediata dei trucchi che abbiamo già visto: l'orlatura, la scrittura bustrofedica. Perché? Perché fa giocare qualcosa di meno familiare delle costruzioni della vita quotidiana (il ricamo, l'aratura). Infatti, fa giocare l'infinito. L'infinito ci sembra una scala, piantata per terra (*Base*) ma non appoggiata a niente verso l'alto (*Passo*)




Come faccio a convincervi della bontà del metodo induttivo o della solidità della scala? Posso provare con il metodo di dimostrazione per assurdo, che sarà il metodo regolarmente applicato in seguito per dimostrare teoremi di logica. Suppongo di aver dimostrato $P(n)$ per induzione. Poi suppongo per assurdo che esista un intero $m$ per cui $P(m)$ è falsa. $m$ è un numero finito. Lo si può maneggiare tranquillamente. Mi chiedo: $m$ è il più piccolo numero per cui $P(m)$ è falsa? Alla domanda posso sempre rispondere o sì o no. Infatti solo un numero finito di passi separano $m$ dalla base. Scendendo la scala, cioè passando da $m$ a $m-1$, a $m-2$ ecc. posso verificare se tra le $m$ proposizioni $P(1)$, $P(2)$, …, $P(m)$ ce n'è una falsa oppure no. Se c'è ed è $P(k)$ quella con $k$ minore, sostituisco $m$ con $k$ (ma lo chiamo ancora $m$), altrimenti sarà l'originario $m$ il più piccolo numero per cui $P(m)$ è falsa. Ma allora $P(m-1)$ è vera, quindi $P(m)$ è vera per il passo induttivo. Poiché $P(m)$ risulta contemporaneamente vera e falsa – cosa impossibile per il principio di bivalenza di cui dirò tra poco – respingo l'ipotesi assurda e concludo che le proposizioni $P(n)$, dimostrate per induzione, sono tutte vere.

Mi dispiace. Non vedo più la convinzione brillare sulle vostre facce, ma non posso fare di meglio. D'altra parte, quando ci si affaccia all'infinito, questa reazione vicina allo sgomento è normale. Nell'infinito, anche in quello trattabile con metodi semplici come l'induttivo, c'è qualcosa di *unheimlich*, di inquietante, che non è eliminabile. La cosa va messa in conto per spiegare la repulsione che regolarmente la matematica esercita sulla maggior parte degli esseri umani, i quali preferiscono esorcizzare l'infinito con la religione e dormire sonni tranquilli.

In realtà la dimostrazione per induzione ha un contenuto intuitivo profondo. Essa si basa sulla nozione, che può essere assiomatizzata in modo rigoroso, secondo la quale ogni numero naturale può essere raggiunto in un numero finito di passi partendo da 0 e "aggiungendo" sempre 1. Sembra banale, ma le meraviglie della teoria dei numeri scaturiscono tutte da questa banalità.

*I due contesti*

Ho insistito sulla dimostrazione per induzione della proprietà nicomachea, sfruttando *en passant* l'occasione per presentarvi un esempio di dimostrazione per assurdo, non solo perché sarà sistematicamente usata in seguito, ma anche per chiarire una differenza concettuale, di alto valore epistemologico, che mette un po' d'ordine tra le molte possibilità di dimostrare verità matematiche. La distinzione risale a Galilei, fu formalizzata da Leibniz e ripresa nel secolo scorso da Reichenbach, epistemologo della meccanica quantistica. Galilei fa dire a Salviati:

"Cotesto, che voi dite, è il metodo col quale egli [Aristotele] ha scritta la sua dottrina, ma non credo già che e' sia quello col quale egli la investigò, perché io tengo per fermo ch' e' procurasse prima, per via de' sensi, dell'esperienze e delle osservazioni, di assicurarsi quanto fusse possibile della conclusione, e che doppo andasse ricercando i mezzi da poterla dimostrare, perché così si fa per lo più nelle scienze dimostrative: e questo avviene perché, quando la conclusione è vera, servendosi del metodo risolutivo, agevolmente si incontra qualche proposizione già dimostrata, o si arriva a qualche principio per sé noto; ma se la conclusione sia falsa, si può procedere in infinito senza mai incontrare verità alcuna conosciuta, se già altri non incontrasse alcun impossibile o assurdo manifesto" (G. Galilei, "Dialogo dei massimi sistemi. Prima giornata", in *Opere di Galileo Galilei*, Ricciardi, Napoli 1953, p. 405.)

Galilei come Filone. Leibniz distingueva tra *ars inveniendi* e *ars judicandi*. Reichenbach traduce il latino di Leibniz in *contesto di ricerca* e *contesto di giustificazione*. Dal contesto di ricerca provengono le verità di fatto, contingenti, eventualmente infinite. Tipicamente opera in contesto di ricerca l'analizzante durante la seduta. Offre all'analista le sue trovate. Nel contesto di giustificazione, invece, le verità di fatto – le trovate – vengono verificate e trasformate in verità di ragione, necessarie e finite. Tipicamente opera in contesto di giustificazione l'analista che sottopone a interpretazione le trovate dell'analizzante e le inserisce in una costruzione, che dovrà essere provata dall'emergenza delle trovate successive.

La differenza tra i due contesti è anche metodologica. Non esiste un metodo rigidamente codificato per produrre verità di fatto nel contesto di ricerca. La regola analitica fondamentale è molto permissiva. Prescrive *solo* di dire tutto, anzi qualunque cosa. Nella ricerca scientifica, come in quella psicanalitica, tutto va bene finché funziona. Si usano algoritmi euristici (da *eurisco*, trovo), da non confondere con eristica, ossia di mera confutazione della verità dell'altro (uno schematismo non raro nell'analisi dell'isteria). Se producono risultati si continuano a usare, altrimenti si accantonano. L'esempio banale che tutti voi conoscete sono i motori di ricerca sul *web*. Nel contesto di giustificazione, invece, si è più rigidi, direi che si è fortemente binari: una tesi è dimostrata se soddisfa certi criteri, altrimenti no. I metodi di verifica sono standardizzati. Per esempio, se si applica l'induzione si richiede una base e un passo induttivo. Per fare una dimostrazione per assurdo si falsifica la tesi e si cerca sistematicamente una o una contraddizione o un contromodello. Se non si trova il contromodello, ma si incontra una contraddizione, il teorema è dimostrato. In caso contrario è tutto da decidere.

La storia della matematica offre un esempio clamoroso di distinzione tra i due contesti di ricerca e di giustificazione. Ci sono buoni motivi per credere che Archimede conoscesse gran parte del moderno calcolo infinitesimale, in forma ingenua o non standard, basato sugli infinitesimi attuali. Tale conoscenza gli serviva per calcolare il volume della sfera o il baricentro delle parabole. (Un tema, quello del calcolo dei baricentri, caro al Rinascimento italiano, che si può proprio chiamare *Archimede Renaissance*). Ma le dimostrazioni di Archimede sono rigorosamente per esaustione. Dimostrano che il limite è quello proposto, provando che è contraddittorio assumere che sia o inferiore o superiore ad esso. In questo tipo di dimostrazione tutto il lavoro della ricerca è cancellato. Il segreto del calcolo infinitesimale greco perì sotto la spada del rozzo soldato romano che uccise Archimede. L'esempio dimostra anche la divaricazione dei due contesti: quello di ricerca prevalentemente privato e quello di giustificazione prevalentemente pubblico. Ma si tratta di una divaricazione che si risolve in una sovrapposizione. Infatti non si può mai parlare dell'uno senza l'altro.

Tornando al nostro esempio nicomacheo, l'algoritmo dell'orlatura del quadrato o della scrittura bustrofedica sono esempi di algoritmi euristici. Hanno funzionato e, perciò, ci hanno convinto. Ma potevano anche non funzionare e avremmo dovuto abbandonarli ed escogitare altri trucchi. La ricerca si fa così, con una dose ineliminabile di intuizione. La giustificazione, invece, proscrive l'intuizione, perché è troppo individuale, troppo legata alle abitudini di vita del singolo. La giustificazione ha bisogno di ottenere largo consenso comunitario sulla base di metodi semplici, estensivamente applicabili e di facile verifica. L'induzione matematica, che decanta il problema delle sue peculiarità che affascinano durante la ricerca, riducendo tutto alla verifica di un predicato $P$, è un metodo di giustificazione. Buono per convalidare un risultato, per presentarlo in forma esatta una volta trovato, ma inutile per trovarlo *ex novo*. Offre alla comunità scientifica verità ragionevolmente fondate, ma non crea legame sociale su precisi interessi di ricerca. Ha un che di funereo e di freddo – lo vedo dai vostri volti – nel senso che rappresenta l'omega, la conclusione della ricerca. Non coglie la dinamica della verità come la colgono i trucchi euristici. Lo dimostra il fatto che eravate più interessati all'orlatura del quadrato che all'algebra di Maurolico.

Tuttavia, l'alfa e l'inizio della ricerca non sono del tutto estranei al metodo induttivo. Vedrete presto che le formule ben formate della logica si definiscono induttivamente (o ricorsivamente). Ammesso che una formula sia ben formata, si ottiene ancora una formula ben formata "prolungando" la prima con un certo operatore. Per esempio, se $\alpha$ è una fbf, come si dice, anche *non*$\alpha$ è una fbf. Qui il contesto di giustificazione non funziona alla fine della ricerca ma all'inizio, in modo da avviare la ricerca su basi solide: giustifica le definizioni. Nello studio dei numeri transfiniti il metodo induttivo si usa per definire nuovi oggetti più che per dimostrare teoremi.

*La logica meccanica*

La matematica, come abbiamo appena visto, non si fa in un modo solo. Ma la logica moderna è matematica. Nella prossima mezz'ora vi darò una breve giustificazione storica di questa affermazione. Quindi la logica non si fa in un modo solo. Ricordate questo ragionamento quando più tardi vi presenterò il *modus tollens* come modo di deduzione (o inferenza) dell'epistemologia falsificazionista. Sarebbe scientificamente provato che la logica non è matematica se fosse una. Infatti, è proprio questo che crede Kant – che la logica sia una, nata come Atena tutta armata dalla testa di Aristotele.

Per chi viene dalla formazione filosofica la logica è la scienza dei principi. Almeno, così la definiva Aristotele. Oggi l'interesse per i principi è molto minore di un tempo. Ovunque i principi vengono indeboliti. La logica che presenterò durante questi incontri sarà una logica più debole di quella classica o aristotelica. Vi parlerò, infatti, di logica del sapere o logica epistemica, a partire dall'indebolimento del principio aristotelico noto come *terzo escluso*. Fondamentalmente i principi della logica aristotelica sono tre:

principio di identità: *p seq p* o in formule, $p \Rightarrow p$, che si legge: *se p allora p*;

principio di non contraddizione: *non* (*p et non p*) o in formule, $\neg(p\wedge\neg p)$, che si legge: *non* (*p e non p*);

principio del terzo escluso: *p vel non p* o in formule, $p\vee\neg p$, che si legge *p o non p* (*o* inclusivo).

La mia interpretazione è che attraverso i suoi tre principi più che di fondare la logica Aristotele si preoccupi di fondare l'ontologia (cioè, in termini lacaniani, il discorso del padrone). Allora il principio di identità afferma che l'essere è e non si discute. Il principio di non contraddizione nega la possibilità che l'essere contemporaneamente sia e non sia. Il principio del terzo escluso afferma che qualcosa o è non è; non c'è nulla a metà strada tra essere e non essere. Il preontico, come l'inconscio freudiano, che non è ancora, ma sarà stato, per Aristotele semplicemente non esiste. La mia presentazione della logica aristotelica è tendenziosa. Tende a dimostrare che la preoccupazione prima di Aristotele non è logica ma ontologica. Ad Aristotele premeva fondare l'essere. Aveva problemi con l'essere Aristotele. Il primo che parlò di essere fu Parmenide. Ma il modo parmenideo non era facilmente dialettizzabile. Per Parmenide valeva solo il principio di identità. È impossibile costruire una dialettica solo con l'identità. D'altra parte un essere senza dialettica è inservibile. Non si può argomentare né pro né contro. Aristotele indebolisce l'ontologia di Parmenide ammettendo che si possa pensare il non essere, anche se non è, almeno a fini argomentativi, purché lo si pensi come stabiliscono i suddetti tre principi ontologici.

Oggi in epoca scientifica assistiamo a un ulteriore indebolimento dell'ontologia. L'essere come esistenza non è un dato assoluto, ma dipende dal sapere. *Cogito ergo sum* di Cartesio significa che l'essere diventa essere alle dipendenze del pensare, quindi del sapere. La logica, soprattutto quella epistemica, sembra riaffermare i propri diritti nei confronti dell'ontologia. Recentemente stiamo assistendo all'*ontological renaissance*, soprattutto a opera della filosofia analitica di area anglosassone. Ma l'indebolimento ontologico cartesiano sembra definitivamente acquisito. Pensate solo al fatto che il nucleo dell'ontologia contemporanea sembra essere l'ontologia informatica. Insomma, l'essere sarebbe governato dalla macchina epistemica per eccellenza: il calcolatore. Il linguaggio dell'essere diventa, allora, il linguaggio operativo della programmazione. L'essere diventa l'essere dell'ente archiviato nella memoria di qualche *server*. Si lavora all'essere su piattaforme informatiche con linguaggi operativi dedicati: HTML per l'*editing* dei testi, XML per il loro *storage* e *retrieval*.

Tornando ad Aristotele, come sapete, il suo lavoro è codificato nella bibbia della logica classica, l'*Organon*, che comprende: *Categorie, Ermeneutica, Analitici primi e secondi, Topici e Confutazioni sofistiche*. L'invenzione per cui Aristotele va famoso è la teoria del sillogismo. Non entrerò nel merito di questa teoria, perché non si usa più. Non la usate voi come psichiatri, non la uso io come matematico. Aristotele credeva che la sillogistica fosse di qualche utilità nel confronto reciproco di posizioni discordanti, per esempio in tribunale. L'impostazione giuridica della logica aristotelica la rende praticamente inservibile per la ricerca scientifica moderna, mentre conserva qualche *chances* per normativizzare il cognitivismo, la cui verità si basa sull'adeguamento all'essere che c'è. Il cognitivismo serve al giudice per valutare le prove testimoniali, ma non allo scienziato che si interessa ad aspetti non ancora codificati – quindi ancora inesistenti – della realtà. L'ultimo erede del logicismo aristotelico è lo schematismo kantiano, secondo cui funzionerebbe il tribunale della ragione. Qui ci interessa un'altra eredità, più indiretta, di Aristotele.

Il suo giuridicismo dimostra la distanza della logica aristotelica dalla matematica. Per il matematico le posizioni discordanti, primo, non sono mai troppo discordanti e, secondo, sono utili. Le geometrie non euclidee, per esempio, sono certamente discordanti, in quanto basate su varianti diverse dello stesso assioma (l'assioma delle parallele e *le* sue negazioni), ma nell'insieme formano un *corpus* teorico organico che presenta lo spazio dal punto di vista di metriche diverse da quella euclidea, inserendo l'euclidea in una classe di metriche simili ma non uguali. In secondo luogo la discordanza può essere epistemicamente feconda. Se le mie posizioni discordano da quelle del mio collega, non mi interessa confutarle, ma mi preoccupo di trovare la causa epistemica che sta a monte ed è responsabile delle differenze. Aristotele si preoccupava, invece, di fornire a chi discuteva gli strumenti per difendere la propria ortodossia e attaccare l'eterodossia dell'altro, per conservare la prima e distruggere la seconda. In matematica, non esistendo scuole ufficiali, non c'è il problema di distinguere tra orto ed eterodossia. Il sapere matematico è diffuso o ripartito in più frammenti. Il problema è di far interagire un frammento con l'altro. Nell'interazione si crea legame sociale tra matematici con diversi interessi, tra algebristi e topologi, tra teorici dei numeri e geometri, tra… Nessuno possiede *la* verità matematica, ma molti ne sanno qualcosa. Al matematico di ortodossia ed eterodossia non può fregare di meno: lui lavora, se le cose funzionano, bene, se no le abbandona al loro destino.

(*Domanda sulla notazione*) Io uso la notazione bourbakista. Il simbolo della negazione *non* (¬) deriva dall'*Ideografia* di Frege. ∧ sta per *et*, ∨ per *vel*, ⇒ per *se… allora* o *sequitur* (abbreviato *seq*). Ci sono altre simbologie. La scelta è una questione di comodo. Per esempio è scomodo, scrivendo al computer, rappresentare la negazione con la soprasegnatura, introdotta da Ackermann. Ci tornerò.

Nei secoli la logica aristotelica rimase fedele a se stessa. Non progredì, ma si conservò fedele a se stessa. Furono soprattutto i teologi medievali a usarla per dirimere le loro questioni e bruciare gli eretici. Nel medioevo non si fece matematica ma logica. La logica aristotelica resistette alla matematizzazione.

Quel che era davanti agli occhi di tutti era di un'evidenza solare: la logica aristotelica è in gran parte meccanica. Chi non se ne accorse fu solo Aristotele. Chi cominciò a riflettere sulla meccanicità della logica fu Leibniz. Il quale la considerò un fatto positivo. Il nostro buon senso, che è aristotelico, ci porta a disprezzare tutto ciò che è meccanico. L'epoca scientifica si caratterizza, invece, per una valorizzazione della meccanicità. Ma il pregiudizio antimeccanicista resiste. L'avversione per il meccanicismo si rinforzò in età barocca parallelamente all'emergere del discorso scientifico. Generò le pratiche magiche, per esempio con il movimento dei Rosacroce, e divenne in un *topos* antiscientifico consolidato dell'umanesimo filosofico. Voi tutti avete letto i *Promessi sposi*. Quando il futuro fra Cristoforo incontra per strada il proprio rivale gli intima: "Fatti da parte vile meccanico". Per la mentalità prescientifica il "meccanico", che lavorava con le mani, era un lavoratore di livello inferiore. Il lavoratore di primo livello era l'erudito scolastico che pensava le astrusità aristoteliche. Nei *Promessi sposi* il simbolo è don Ferrante, che grazie al proprio sapere libresco arrivò a negare l'evidenza della peste. La resistenza alla scienza – al suo meccanicismo vero o presunto – è la tipica resistenza dello psicananalista. Essa produce regolarmente la resistenza dell'analizzante all'analisi. Entrambe – la prima come causa della seconda – sono effetti dell'onnipotenza narcisistica. Entrambi – analista e analizzante – non ammettono di non essere liberi. L'analista non ammette di non essere un soggetto predeterminato dal gioco dei significanti. L'analizzante non ammette di rientrare come caso previsto negli schemi metapsicologici freudiani. Quindi, con le scuse più diverse, entrambi accusano la scienza di non avere un'anima e regrediscono insieme a mitologie prescientifiche. Da Freud si torna a Jung.

Leibniz, per contro, da matematico di prima grandezza, considerava la meccanicità un fatto positivo. Con Leibniz entriamo in pieno in epoca scientifica. La scienza nasce con pensatori del rango di Galilei e Cartesio, i quali cessano di proporre al pensiero umano il tema dell'essere e pongono al centro della riflessione scientifica il tema della meccanicità. Suscitando resistenze ancora oggi vive e vitali. Si resiste all'idea dell'uomo macchina secondo Lamettrie. Si resiste, ancora più ferocemente, all'idea freudiana che la psiche funzioni come meccanismo morto. L'ilozoismo, la concezione della materia vitale, è duro a morire.

Rilevata la meccanicità della logica, Leibniz si pose la questione se e come matematizzarla. Si chiedeva se esistesse un *calculus ratiocinator*. Sognava che tra pochi anni – quattro o cinque anni di lavoro di pochi uomini dotti ma dotati – si sarebbe potuto risolvere ogni problema scientifico in modo meccanico. Secondo questo sogno, quando due erano in disaccordo, invece di litigare come facevano i teologi scolastici, potevano sedersi davanti a una macchina calcolatrice e, semplicemente invocando *Calculemus!*, risolvere la diatriba. Il calcolo avrebbe funzionato da giudice: se dava un risultato aveva ragione uno, se ne dava un altro aveva ragione l'altro. Animato da una sorta di *furor juridicus* (il diritto fu la sua prima formazione, come del resto fu per Cartesio), Leibniz si adoperò in questo senso. E riuscì a costruire un frammento di *calculus ratiocinator* sotto forma di calcolo dell'inclusione, tuttora valido e ricco di intuizioni. Esso contiene un assioma moderno. Si tratta dell'assioma di idempotenza per cui $A+A=A$. Anche su questo ritornerò.

Il + di Leibniz è circolettato: non è + ma ⊕, per segnalare che è un + *sui generis*. Si tratta, infatti, di un + che fa sì che 1 ⊕ 1 sia ancora uguale a 1. Non è un + aritmetico, ma è l'antesignano del moderno *vel* logico. Infatti:

$$A \oplus A = A,$$

o, come si scrive in termini moderni:

$$A \text{ vel } A = A.$$

Leibniz prefigura il calcolo booleno delle classi. Aggiungendo alla classe $A$ se stessa, si ottiene ancora la classe $A$. Ho degli oggetti su questo tavolo. Se li duplico e li metto assieme agli oggetti di questo tavolo, ottengo ancora un insieme formato dagli oggetti di questo tavolo. In logica classica la ripetizione non conta. (Conta nei sistemi di logica lineare, che qui non tratto).

*Logica algebrica*

L'intuizione di Leibniz rimase lettera morta per altri 150 anni. Fu ripresa, a metà del secolo XIX, da un altro matematico, inglese questa volta, il quale si accorse che la logica poteva essere algebrizzata, cioè semplificata. Sto parlando di George Boole. Anche Boole scoprì una legge di idempotenza. Quella di Boole vale per l'*et*, come quella di Leibniz valeva per il *vel*. Più avanti incontreremo un'altra legge di idempotenza, valida per gli operatori epistemici. Adottando la scrittura di Boole, che omette il segno di moltiplicazione, come si fa ancora oggi, scrivo

$$xx = x,$$

o in notazione compatta:

$$x^2 = x,$$

la quale significa che, se interseco una classe con se stessa, cioè se cerco gli elementi comuni di una classe con se stessa, ottengo ancora la classe di partenza. La genialità di Boole consistette nel *non* (non sottolineerò mai abbastanza questo *non*) attribuire alcun significato a tale scrittura (esattamente come dovrebbe fare un analista con gli enunciati dell'analizzante) e nell'osare trattarla algebricamente come se fosse un'espressione del comune calcolo algebrico. Ripercorriamo il calcolo di Boole. Sottraendo $x$ a entrambi i termini dell'equazione, ottengo un'equazione equivalente:

$$xx - x = x - x,$$

cioè,

$$xx - x = 0.$$

Raccogliendo $x$ a fattor comune, operazione possibile per la proprietà distributiva dell'algebra, ottengo

$x(1 - x) = 0.$

L'equazione di secondo grado ammette due soluzioni, rispettivamente

$x_1 = 1$
$x_2 = 0.$

*A posteriori* ottengo per le variabili logiche i valori che oggi corrono su tutti i computer: 1 per "vero" e 0 per "falso". Non solo, con tale posizione, ottengo un significato per i passaggi intermedi che avevo dedotto senza curarmi del loro significato.

$x(1 - x) = 0$

significa che è falso che valga contemporaneamente $x$ e $(1–x)$. Il risultato consente di interpretare $(1 – x)$ come *non* $x$. L'intera formula $x(1 - x) = 0$ corrisponde, quindi, al principio di non contraddizione. Che ora si dimostra non tanto primario, come credeva Aristotele, essendo una conseguenza del principio di idempotenza. La scrittura logica *non*($x$ *et non* $x$) si può scrivere algebricamente $x(1 - x) = 0$. Tale scrittura significa che non è possibile che siano veri (o "uno") contemporaneamente $x$ e *non* $x$, perché sarebbe falso (o "zero"). Convinti?

L'algebrizzazione booleana della logica ha portato a risultati teorici e pratici assai prossimi al sogno leibniziano del *Calculemus*. Tra i primi le algebre di Boole, tra i secondi i moderni computer che funzionano con due valori: porta logica aperta = 1, porta logica chiusa = 0. In termini puramente logici lo 0 corrisponde al "falso" e l'1 al "vero". L'algebra, come vedete, contribuisce a meccanizzare la logica. Il risultato è che *un* modo di fare logica è di scrivere le variabili logiche – una pratica che risale a Aristotele – esattamente come si fa in algebra – una pratica matematica che Aristotele ignorava. Aristotele – rendiamo giustizia ai grandi – presenta i suoi schemi sillogistici attraverso lettere che considerava variabili capaci di assumere i valori "vero" o "falso". Anche noi seguiremo l'uso aristotelico. L'intuizione di Aristotele aveva una base. Derivava dalla notazione numerica greca che, come dicevo prima, è letterale. Era quindi facile per i Greci "confondere" variabili con valori numerici. Aristotele, quindi, era sulla strada giusta che portava a utilizzare le lettere come variabili.

Le variabili si chiamano così perché assumono valori diversi, ossia variabili. Boole ci ha mostrato che le variabili logiche possono assumere addirittura valori numerici: *o* 0 *o* 1, ma mai contemporaneamente 0 *e* 1 (*principio di bivalenza*). In termini psichiatrici, il principio di bivalenza esclude il principio di ambivalenza – un principio scientificamente bastardo, ideato da un radicale nemico di Freud, Eugen Bleuler, per spiegare tutto e niente. L'essenza del principio sta meno nel fatto che i valori di verità siano due quanto nell'interdire la possibilità che essi siano assunti contemporaneamente da una variabile proposizionale. I valori numerici binari 1 e 0 stanno per i valori di verità "falso" o "vero". Perciò spesso parlerò colloquialmente di binarismo, invece che di bivalenza.

### *La logica in formato euclideo*

La logica si può fare in modo meccanico? si chiede Leibniz. Sì, risponde Boole – si può fare in modo algebrico. Nell'algebra booleana si calcolano i valori di verità con regole predeterminate. Non si tratta delle regole dell'algebra imparata a scuola, ma si tratta comunque di un'algebra a pieno titolo, con due operazioni, somma e prodotto, che corrispondono rispettivamente all'*et* e al *vel* logici, con proprietà distributive e regole di inversione o complementazione, per calcolare la negazione. Cosa volete di più?

Nel filone meccanicistico della logica c'è un altro autore che meccanizza la logica in modo diverso da Boole. Si chiama Friedrich Gottlob Frege. Lo storico della matematica si chiede perché la logica venga meccanizzata e in più modi solo nel XIX secolo. La ragione è presto detta. Nel XIX si fa molta matematica, in parte perché la si eredita dai secoli precedenti (tutta l'analisi), in parte perché la si inventa *ex novo* (le geometrie euclidee). Il matematico ottocentesco ha bisogno di rigore e di certezze nel suo operare. Ha ereditato da Cartesio la passione per la certezza, che persegue con più accanimento della verità. Da qui i tentativi di rigorizzare l'analisi aritmetizzandola (Weierstrass) e di rigorizzare la logica algebrizzandola (Boole) o geometrizzandola (Frege).

Ma non è l'unico modo. Ricordate sempre che la matematica si può fare in molti modi. A maggior ragione, essendo inclusa nella matematica, la logica si fa in tanti modi e così pure la fisica. Non potendo fare a meno della matematica, la fisica condivide la stessa "biodiversità" della matematica. Per esempio, la meccanica classica si formalizza in modi equivalenti attraverso due diverse funzioni delle coordinate e degli impulsi: la lagrangiana (differenza tra energia cinetica e potenziale) e l'hamiltoniana (somma di energia cinetica e potenziale). Analogo gioco tra "equivalenza sostanziale" e "diversità apparente" si registra in meccanica quantistica. La versione ondulatoria di Schrödinger equivale alla versione matriciale di Heisenberg. Nel 1933 Schrödinger e Heisenberg furono insigniti entrambi del Nobel per gli stessi meriti. Oggi, accanto alla presentazione attraverso gli integrali di cammino alla Feynmann-Dyson (la cosiddetta rinormalizzazione), abbiamo la versione degli universi paralleli di Everett-Deutsch, particolarmente idonea alla computazione quantistica. Tornando alla logica, per un Boole che la meccanizza in modo algebrico troviamo, poco dopo, un Frege che la meccanizza in modo geometrico, nel senso spinoziano di *more geometrico*. Tornerò a parlare di Frege, che è il tormentone della logica moderna. Non si può parlare di logica senza parlare di Frege. Dirò anche degli errori di Frege. Ho detto prima che frequentare i geni vuol dire misurarsi con i loro errori, che giustamente sono geniali. Ci misureremo con gli errori geniali di Frege. Il confronto è doveroso, nonché istruttivo. Frege, dunque, riuscì a meccanizzare la logica presentandola niente meno che in modo euclideo.

Cosa vuol dire? Il modo euclideo è il modo assiomatico. Fissa degli assiomi, che riguardano proprietà di enti primitivi (punti, rette, piani nel caso euclideo). Ad essi aggiunge regole di deduzione per derivare dagli assiomi dei teoremi. Euclide scrisse i suoi tredici libri di *Elementi* sulla base di cinque assiomi. Il quinto è il più celebre di tutti. Fece discutere per secoli. Si pensava di dimostrarlo a partire dagli altri. Nel secolo XIX Bolyai e Lobacevskij, costruendo le geometrie non euclidee, che si basano su negazioni del quinto postulato, dimostrarono che esso è indipendente dagli altri assiomi. Grazie al lavoro di Hilbert si sa che per costruire la geometria euclidea cinque assiomi non bastano. Ne occorrono almeno una ventina; lo stesso quinto si spezza in almeno due: l'assioma euclideo propriamente detto e l'assioma di Archimede. L'importante è che gli assiomi siano in numero finito sia in geometria sia in logica. Noi ci limitiamo a teorie finitamente assiomatizzate.

A partire dagli assiomi, con l'aiuto delle regole di deduzione si ottengono i teoremi. Ma cosa sono i teoremi? I teoremi sono verità certe, perché dimostrate *meccanicamente*. L'avverbio assume qui un significato ben preciso e un poco paradossale. Significa che le verità meccaniche sono trovate indipendentemente dal riferimento alla verità intuitiva e al significato. Perciò sono verità certe. I teoremi sono verità intuite dal singolo individuo o dal singolo gruppo, durante la ricerca (*ars inveniendi*), ma giustificate in modo meccanico, pubblicamente riconosciuto come attendibile (*ars judicandi*), attraverso assiomi e regole. Le regole si applicano agli assiomi, li manipolano in un certo modo previsto e codificato – direi burocratico – e ottengono come risultato i teoremi della teoria. L'intero processo, essendo pubblico, democraticamente controllabile e trasparente, conferisce certezza alle acquisizioni del pensiero, che ora ambiscono al titolo di teoremi.

*La certezza scientifica*

Una breve digressione sulla natura della certezza scientifica è qui necessaria. Certezza significa meccanicità. Meccanicità ripetizione. Anche Freud al culmine della carriera parlò di ripetizione dell'identico. La pulsione di morte inserirebbe nella psiche una dose di ripetitività che ne condizionerebbe il funzionamento meccanico, indipendente dall'intenzionalità del soggetto e dal significato del mondo per lui. Il meccanicismo è la bestia nera del pensiero metafisico che blatera di libertà dello spirito. Ma bisogna intendersi sul significato profondo del termine. Esso non è quello positivista, secondo cui i risultati sperimentali sono attendibili se sono meccanici e si ripetono tali e quali a ogni replica sperimentale, non è neppure quello preconizzato da Laplace secondo cui la conoscenza della configurazione cinetica attuale predetermina la conoscenza delle configurazioni future. Meccanicismo non è neppure connessione stretta e rigida di causa efficiente ed effetto. In fisica moderna non si parla di eziologia, ma di interazioni. Il discorso delle cause sopravvive nelle facoltà universitarie medievali: medicina e diritto. La causa è la causa della malattia: il gene o l'agente infettivo. La causa è il movente del delitto. I criteri per determinare le cause sono analoghi in medicina (i criteri di Henle-Koch) e in diritto (i criteri di Stuart Mill).

Il significato moderno, più soggettivo che oggettivo, di "meccanico" è "certo", ma non più in un contesto astratto – le condizioni ideali di laboratorio dove si ripetono sperimenti standardizzati – né solipsistico, dove il soggetto acquisisce il proprio sapere, indipendentemente dalle interazioni con gli altri, semplicemente speculando. Oggi in epoca scientifica le certezze sono risultati collettivi. Nascono dalla cooperazione dei singoli. Ho insistito tanto sul fatto che la matematica sia un sapere collettivo. C'è un collettivo di pensiero, un *Denkkollectiv* direbbe Ludwik Fleck, all'interno del quale si configura uno stile di pensiero che acquisisce nuove verità e le sottopone al vaglio dei propri criteri, non necessariamente universali, avendo ogni collettivo i propri e caratteristici. Tu prima entri in un collettivo di pensiero e poi pensi. Una volta che sei entrato penserai meccanicamente come vuole il collettivo. È il collettivo che decide se il risultato della tua speculazione è attendibile, prima, certificato e certo, poi, dopo che è passato un sufficiente lasso di "tempo del sapere". Il risultato è che certezza e meccanicità, se coincidono, è perché hanno trovato un luogo dove sovrapporsi concettualmente. Questo luogo è la dimensione pubblica del collettivo di pensiero, luogo proprio del contesto giustificativo. Quando il pensiero supera "l'esame di stato" (minuscolo!) solo allora diventa pensiero.

Da questo punto di vista il procedimento cartesiano del dubbio perde molto del suo carattere astratto e metafisico, nonostante sia presentato proprio nelle *Meditazioni metafisiche*. Già Cartesio, rifiutando la traduzione sillogistica del suo pensiero, insisteva sul carattere singolo e singolare dell'operazione. Ciò significa che tu e tu e tu potete riprodurla, ognuno per conto proprio e in un certo senso, ognuno insieme agli altri. La sospensione del sapere operata dal dubbio e la conquista della certezza – se non so, allora so – non è un procedimento ideale, come vorrebbe Husserl, ma è il procedimento effettivo di un soggetto che passa da un collettivo di pensiero a un altro. Cartesio passava dal collettivo di pensiero della Scolastica, buttava a mare il sapere libresco, e entrava nel collettivo di pensiero della matematica, dove il sapere non sta più nei libri ma nel reale delle interazioni sociali. Ai tempi di Cartesio, l'iniziale comunità scientifica europea era coordinata da Padre Mersenne, che teneva i collegamenti del gruppo, per altro molto lasso.

Per noi vale lo stesso discorso. Durante questi incontri non farò altro che ricavare teoremi di logica, inserendomi nella recente tradizione collettiva del fare logica, una tradizione diversa da quella classica e medievale. Forse il progetto non vi commuove tanto, vedo. Ma dedurre teoremi di logica significa essere ragionevolmente sicuri delle sciocchezze che diciamo, perché siamo in molti a dirle. I geni, dicevo, a volte dicono sciocchezze. Bisogna capirli, senza condannarli. Loro non hanno tempo – a volte, come nel caso di Freud, neppure gli strumenti – per passare al contesto giustificativo, essendo troppo indaffarati a far fronte a quello di ricerca. Quando, ai tempi del *Compendio*, Freud si lascia andare a dire che l'inconscio è il regno dell'illogica, si sente che va in fretta. Era al termine della sua vita. Ma si sente anche che non ha gli strumenti per pensare a logiche alternative a quella aristotelica. Non essendo matematico pensa che di logica ce ne sia una sola e che tutto il resto sia illogica. Su questo punto il nostro seminario corregge Freud. I maestri lasciano a noi, allievi o posteri, il compito di correggerli giustificandoli. Nel caso di Freud, di Marx, di Lacan l'errore degli allievi è evidente. Si sono dedicati a ripetere pedissequamente i maestri, senza correggerli e quindi senza promuovere il loro pensiero. Le società, i partiti, le scuole hanno trasformato i fondatori in santini dell'ortodossia, eliminando sistematicamente dal loro discorso ogni riferimento scientifico. Il risultato è la produzione scolastica gergale, incomprensibile e ininfluente sul piano culturale. Sono più deleteri che inutili allievi del genere, perché danneggiano il maestro più dei suoi avversari dichiarati. Ma tornando a noi, che non siamo geni, è più prudente darci una regolata prima di esporci al ridicolo. La logica matematica democraticamente aiuta tutti i non geni a formulare enunciati corretti. Il senso della proposta fatta a Fulvio di tenere un seminario di logica dovrebbe essere ora chiaro. La buona logica ci dà gli strumenti per giustificare il nostro sapere, da qualunque parte provenga: da Freud, da Jung o dal… nostro inconscio.

*La verità di Freud non è cognitiva ma fantasmatica*

*Italo Carta*. Nel caso di Freud il contesto di giustificazione è dato dalla clinica.

Freud aveva un disperato bisogno di aiuto teorico e di colloquiare con gente alla sua altezza. Non potendo fare affidamento su colleghi e allievi, suppliva con i pazienti. Con il suo sogno di controdesiderio la "bella e spiritosa macellaia" gli fu di aiuto teorico maggiore di Adler. L'isteria è *il* modello di scienza freudiana.

*Italo Carta*. Forse Jung poteva essere un interlocutore.

Sì, Jung poteva esserlo, ma non lo fu. La mia ipotesi, discutibile quanto volete, è che Jung ebbe paura di fronte alla piega troppo scientifica, quindi deterministica – il termine giusto è "sovradeterministica" – presa dal discorso freudiano in questioni tradizionalmente poco deterministiche come quelle psicologiche. Lo dimostra il loro scontro sulla natura dell'energia psichica, che per Jung era generica e aspecifica e per Freud strettamente sessuale. Jung regredì, allora, a verità più padroneggiabili, più anodine. Si rifece alle tradizionali verità prescientifiche della magia e dell'alchimia, in generale alla mitologia platonico-umanistica.

Questo è il mio modo di vedere la cosa, che non pretendo sia condiviso. L'unico momento giustificativo, per altro molto tardivo, di Freud è in *Costruzioni in analisi*, a due anni dalla morte, dove formula il criterio della verità psicanalitica: vero non è l'adeguamento dell'intelletto alla cosa, ma è vero ciò che produce altra verità, "l'affiorare di nuovo materiale inconscio", dove l'accento va posto su "nuovo". Con per le mani un inconscio che deborda dall'intelletto, capite bene che a Freud non serviva gran che il criterio aristotelico dell'*omoiosis*. Il criterio della fecondità epistemica si "adegua" meglio alla costruzione freudiana, che è una costruzione epistemica. "La mia psicanalisi è vera – sembra giustificarsi Freud – perché produce la verità del soggetto". Ma sarebbe lo stesso dire: "la novità del soggetto".

Il criterio freudiano di verità è a sua volta da giustificare. La metapsicologia dell'inconscio richiede di necessità l'abbandono dell'adeguamento a quel che c'è. Ma è sufficiente l'abbandono del cognitivismo per rientrare nella metapsicologia.

Per la logica ontologica classica la verità è l'adeguamento all'essere. "È vero dire di ciò che è che è; è falso dire di ciò che non è che è", recita Aristotele nel libro Γ della *Metafisica*. Il punto è riformulato in termini di concordanza tra linguaggio e metalinguaggio da Tarski nell'esempio paradigmatico: "la neve è bianca" è vera se e solo se la neve è bianca. L'ingenuità ontologica sta nel credere che ci sia un rapporto tra realtà di quel che c'è (la neve è bianca, senza virgolette) e il linguaggio che predica tale realtà ("la neve è bianca", con virgolette). Come dice il buon senso, si tratterebbe di "dire pane al pane e vino al vino". Virgolettando il primo pane e il primo vino, naturalmente. "In realtà" ciò a cui siamo di fronte è il rapporto tra linguaggio (senza virgolette, che il cognitivismo identifica frettolosamente con la realtà) e il metalinguaggio che parla del linguaggio (con virgolette). Ma i rapporti tra linguaggio e metalinguaggio sono problematici e si caratterizzano per l'inadeguatezza del metalinguaggio a definire il linguaggio, che è già da subito inevitabilmente metalinguistico. Ciò porta alla nota formula lacaniana; *non esiste metalinguaggio*. (la quale fa da *pendant* all'altra, più recente: *la verità non può essere detta tutta*). Negli anni Trenta lo stesso Tarski dimostrò un metateorema di incompletezza semantica, secondo il quale è contraddittorio definire un predicato *verità* che per ogni proposizione *p* del linguaggio dica che *p* è vera se e solo se *p* è vera. Lo scollamento tra linguaggio e linguaggio è importante in psicanalisi perché è il (non) luogo – "l'altra scena" direbbe Freud – dove abita il fantasma. Lì, in quell'impossibile a dirsi sta la verità del rapporto fantasmatico tra soggetto e oggetto.

Certo, a questo punto le funzioni dello psichiatra e dello psicanalista prendono strade diverse. Lo psichiatra deve preoccuparsi del rapporto di realtà che il delirio minaccia. Deve rispondere dell'adeguamento della mente del suo paziente alla realtà. Deve verificare se il rapporto d'oggetto, come insegnava ai miei tempi il prof. Cazzullo, è fluido, armonico e finalistico. Sono caratteristiche che, soprattutto il finalismo, nel discorso psicanalitico saltano. Perché? Perché nell'inconscio psicanalitico c'è una pulsione che Freud ha creduto bene chiamare pulsione di morte – non sappiamo bene quanto questo nome sia giustificato – che non è fluida, né armonica né finalistica. La pulsione di morte introduce il non senso nella vita del soggetto. Il non senso non è spiegabile attraverso nessun finalismo. Questo deve sapere chi affronta il discorso psicanalitico proveniendo dai discorsi del buon senso classico, vuoi ontologico, vuoi adattativo, per rendere al discorso psicanalitico la giustizia che merita. Da Aristotele a Tommaso al cognitivismo moderno si fa il discorso dell'adeguamento. Freud non critica né contesta l'adeguamento ma lo sospende – lo mette tra parentesi, dice Husserl – per lasciare spazio a un'altra verità, quella fantasmatica, di parlare.

Lo psicanalista, pertanto, è chiamato a lavorare con l'insensatezza della coazione a ripetere, utilizzando la realtà per ricostruire quella metarealtà, che non esiste o esiste poco ma che è più reale della realtà: il fantasma del soggetto. Freud ne sperimentò presto le conseguenze. Come si spiegavano i racconti delle isteriche sui padri seduttori? A Vienna i padri erano tutti pedofili? Nella maggior parte dei casi non c'erano prove realistiche per questa eziologia, anche se in molti casi naturalmente non mancavano). Infatti il fantasma sta al di là dell'eziologia medica – dell'agente infettivo – o giuridica – dell'intenzionalità. Aver optato per la metarealtà del fantasma fu secondo le femministe una debolezza piccoloborghese di Freud. Fu, invece, a nostro giudizio, obbedienza al dovere epistemico. Freud stava inventando un discorso scientifico su una realtà che non c'è, come sono in genere le vere realtà scientifiche. Affrontando il fantasma – la scena primaria o *Urszene* – si poneva al di là del cognitivismo filisteo. Doveva pagare le conseguenze di impopolarità di un gesto anticonformista.

(*Domanda sulla verità matematica*)

Il fatto curioso è che in matematica vale il criterio freudiano di verità. Una teoria matematica è vera se produce altre teorie, magari in campi diversi. Un verità aritmetica produce verità geometriche e viceversa. La dimostrazione della grande congettura di Fermat sui numeri naturali è stata recentemente dimostrata da Andrews, dopo tre secoli dalla sua formulazione, utilizzando una congettura sulle funzioni algebriche modulari e una proprietà delle curve ellittiche. Di per sé la congettura di Fermat è di poca importanza teorica. Ma si è dimostrata importante *a posteriori* per le verità matematiche che ha mobilitato altrove, in geometria e in teoria delle funzioni. La delocalizzazione della verità è il reale della matematica, il suo fantasma. Capite, allora, perché da un'ora e mezza non smetto di tracciare parallelismi tra matematica e psicanalisi.

*È questione di tecnica, ossia di sintassi*

Passo ora ad alcuni tecnicismi necessari per realizzare il programma leibniziano della meccanizzazione – spero che vi abituiate a poco a poco a superare l'orrror e il disgusto che questa parola ispira a tutti coloro che, come chi vi parla, provengono dalla formazione umanistica.

Stessa sorte tocca alla parola "tecnica". La quale ha perso il significato greco di "arte e "creazione"; ora indica la mera applicazione meccanica e ripetitiva di un "ritrovato tecnico" al processo produttivo. "Tecnica" significa "senza anima". In questo senso viene parificata a "scienza" e declassata a fatto intellettuale secondario. Il fatto primario rimane la ricerca di un "supplemento d'anima" in un mondo reso arido dalle formule e dalle procedure tecniche, che "fuorcludono" (*sic*) il soggetto. I francesi unificano la condanna della meccanizzazione e della tecnicizzazione, che non lascia posto ai sentimenti, nel neologismo "tecnoscienza". Per i filosofi tedeschi contemporanei, per i Benjamin e gli Heidegger, vivremmo nell'epoca della tecnica, non della scienza. Responsabile del degrado dello stile di vita sarebbe per l'intellettuale d'Oltre Atlantico addirittura Cartesio, il quale avrebbe imposto alla cultura occidentale modalità di pensiero e di razionalità che proscrivono le emozioni. Per contro dall'America siamo ricolonizzati dagli pseudopensieri *New Age*, la religione dei sentimenti, le emozioni e la naturalezza della vita.

Questa classe di pseudofilosofie è frequentata da intellettuali assolutamente carenti di formazione scientifica, da gente che non si è mai scottata le dita con una provetta di acido solforico o rotta la testa con un programma di computer che non gira, ma che giustamente si indigna contro le pretese della metafisica positivista, vetero e nuova, di monopolizzare la scienza come fonte di verità unica ed esclusiva. Noi che sappiamo che la verità non può essere monopolizzata da nessuno (teorema di Tarski) siamo più tolleranti con la scienza e più democratici con ogni proposta veritativa. In particolare, venendo, come Freud, dalla formazione di laboratorio siamo profondamente rispettosi delle invenzioni tecniche che consentono di fronteggiare un po' meglio il reale. In questo senso consideriamo la psicanalisi come un'innovazione tecnica di tutto rispetto, che vale finchè vale il discorso scientifico. Chiusa la parentesi.

Ma quale tipo di tecnica adotterò? Se è vero che la logica, in quanto matematica, si fa in molti modi, anche le tecniche devono essere diverse. Giusto. Non adotterò tecniche algebriche né tecniche topologiche, che pure sono modalità ampiamente usate in logica. Adotterò tecniche sintattiche e semantiche, che in un certo senso sono più tradizionali in logica. Qual è la differenza tra le due? Con sintassi intendo un modo di fare teoria che sospende considerazioni di verità e di significato e si occupa della certezza e del significante, in questo caso della sicurezza e del rigore deduttivi puramente formali (praticamente insensati). La sintassi è il modo adottato da Cartesio nel suo procedere dubitativo. Quel che la sintassi privilegia è l'aspetto di calcolo "senza errori". Tratta i simboli senza chiedersi il loro significato e il loro rapporto con la verità. Il simbolo che segnala che siamo in ambito sintattico è il simbolo del giudizio di Frege. Esso si legge: è teorema quel che segue a destra, a partire da assunzioni che stanno a sinistra. $\vdash$ ratifica il risultato per eccellenza del procedimento sintattico: il teorema. (Attenzione! *Teorema interno* al sistema, non *metateorema*, cioè teorema riguardante certe proprietà del sistema, considerato dall'esterno come elemento di un insieme di sistemi analoghi).

Con semantica, invece, intendo l'esplicito riferimento alla verità (non la verità astratta, ma la verità della struttura matematica: logica, ordinale, topologica ecc.), che si "incarna" in certi modelli (o presentazioni o realizzazioni), i quali rappresentano il significato dei simboli. Poiché il luogo privilegiato della verità matematica moderna è la teoria degli insiemi in semantica sovrabbondano le tecniche insiemstiche, a cominciare dalla analogia tra connettivi logici e insiemistici: la negazione scritta come soprasegnatura, la congiunzione come intersezione, l'alternativa come unione, l'implicazione come inclusione. Il simbolo che segnala che siamo in ambito semantico è una sorta di raddoppiamento del simbolo di Frege: $\models$. Esso si legge: quel che sta alla sinistra è lo stato epistemico (configurazioni di assunzioni o quant'altro) che funziona da modello per quanto sta a destra del segno. Nella terminologia intuizionista adottata dico che lo stato epistemico $\Gamma$ "forza" l'espressione $p$ a essere vera e scrivo: $\Gamma \models p$.

Entrambi i segni si possono capovolgere: $\dashv$ segnala che a destra non ricorre un teorema, date certe assunzioni a sinistra; $=\!|$ indica che lo stato epistemico a sinistra non è modello delle verità a destra (o le nega).

Il matematico semplifica, dicevo, cioè tende a ridurre le differenze. Gode quando riesce a dimostrare che questo è uguale a quello. La matematica è il festival dell'identico, che tuttavia non riesce mai a sopraffare il diverso. Il matematico raggiunge tipicamente il massimo della semplificazione quando riesce a dimostrare che cose diverse, come i termini a destra e a sinistra di un'equazione, sono uguali. Per lui trovare un'incognita, per esempio estrarre la radice di un'equazione, è meno trovare una cosa nuova, quanto scovare un'uguaglianza, livellando un'apparente diversità tra termini scritti in modo diverso e posti a destra e a sinistra del segno di uguaglianza. La differenza tra i due approcci, sintattico e semantico, è piccola e in molti casi, come vedrete, proprio in logica pura, svanisce. L'interesse della distinzione qual è, allora? mi chiederete giustamente. La risposta è semplice: a evidenziare i casi, se esistono, in cui si concretizza. Infatti, esiste un caso notevole: l'aritmetica. L'aritmetica si differenzia dalla logica proprio perché la sua semantica è più ampia della sintassi e non si lascia ricoprire totalmente da lei. In altri termini, in logica tutte le proposizioni valide (vere in ogni modello) sono anche teoremi (teorema di completezza), in aritmetica no. In aritmetica, ammesso che sia coerente (ma questa è a sua volta un'ipotesi indimostrabile), esistono proposizioni vere ma non dimostrabili (teorema di incompletezza di Gödel). Insomma, cartesianamente parlando, in aritmetica esistono verità che non sono raggiunte dalla certezza. In termini leibniziani, l'*ars inveniendi* trova più cose di quante l'*ars judicandi* non riesca a giustificare. Insomma, se non si fosse posta la differenza tra sintassi e semantica non si sarebbe colta la differenza tra logica e matematica, la prima completa, la seconda incompleta. Un contributo di prim'ordine all'indebolimento del logocentrismo metafisico (il bla bla) che tutt'ora parassita il pensiero occidentale, non solo filosofico ma anche politico.

*Tutto varia,* salva veritate

La trasformazione che meccanizza la logica in *calculus ratiocinator*, cioè in sintassi, richiede alcune premesse tecniche di scrittura. Come si scrivono i fatti della logica? Si scrivono con una particolare stenografia, in parte inventata dallo stesso Aristotele, che aveva bisogno di indicare con lettere classi di proposizioni per rendere il discorso compatto, ma altempo stesso perspicuo. (La retorica è nemica della matematica).

Fondamentalmente i fatti della logica si scrivono utilizzando due classi di simboli, che con i Medievali distinguo in categorematici e sincategorematici. I primi hanno significato autonomo, i secondi non hanno significato autonomo, ma acquisicono significato in connessione con altri simboli. Tra i primi rientrano variabili e funzioni, tra i secondi gli operatori, distinti a loro volta in connettivi e quantificatori.

Le variabili, come dice il nome, variano, cioè assumono valori diversi, appartenenti a un certo insieme o dominio di definizione. Sono di particolare pertinenza logica le variabili proposizionali, che rispettano il principio di bivalenza, già scoperto da Boole. Assumono cioè uno dei due valori di verità V (vero) o F (falso), mai entrambi contemporaneamente. (La nostra logica sarà sempre bivalente. Esistono logiche polivalenti, che accanto al vero e al falso ospitano altri valori di verità: possibile, incerto ecc. Noi non affrontermo mai questo caso). In questo seminario indicherò le variabili proposizionali con lettere latine minuscole corsive: $p$, $q$, $r$…. Riserverò, invece, le lettere greche minuscole, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,… alle metavariabili, cioè a variabili che variano sull'insieme formato da variabili proposizionali o loro assemblaggi, le cosiddette formule ben formate (fbf), di cui preciserò presto la grammatica.

Le funzioni sono variabili di secondo livello, che assumono valori in funzione dei valori di altre variabili (una o più), dette argomenti. Le funzioni esprimono leggi di dipendenza. Più precisamente, la variabile $y$, che varia in un insieme $Y$, detto dominio, assume valori che dipendono dall'argomento $x$, appartenente all'insieme di definizione $X$, detto codominio. Si scrive $y = f(x)$.

Oggi, si preferisce parlare di "applicazioni" $f$, che applicano l'insieme $X$ nell'insieme $Y$, nel senso che a ogni elemento $x$ di $X$ associano un elemento e non più di un elemento $y$ di $Y$. In formule, $f: X \rightarrow Y$ (con lettere latine maiuscole indicherò gli insiemi). Un caso particolare di funzioni è rappresentato dai predicati, che assumono valori nell'insieme $Y$ dei valori di verità $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. I predicati sono pertanto funzioni binarie. Si distinguono predicati monadici, binari, ternari, ennari, a seconda che siano funzioni di uno, due, tre, $n$ (finito) argomenti.

*All'opera!*

Le variabili sono trasformate in altre variabili dagli operatori. Essendo logici gli operatori applicano le variabili (proposizionali e predicative) nell'insieme dei valori di verità $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. Distinguo due tipi di operatori: i connettivi e i quantificatori.

I connettivi sono proposizionali cioè trattano la (le) proposizione, a cui si applicano come un blocco unico e, a partire da essa (esse), definiscono delle funzioni logiche. I quantificatori sono predicativi, cioè operano sull'argomento del predicato.

I connettivi li conoscete già. I fondamentali sono quattro, più un connettivo ausiliario.

Fondamentali:

negazione – *non* (simbolo $\neg$). È un operatore unario nel senso che si applica a un solo argomento proposizionale. Gli altri connettivi sono operatori binari nel senso che operano su due argomenti:

congiunzione – *et* (simbolo $\wedge$)

alternativa – *vel* (simbolo $\vee$)

condizionale – *seq* (*se…, allora…*) (simbolo $\Rightarrow$)

Ausiliario:

bicondizionale – *aeq* (*se e solo se*, abbreviato *sse*) (simbolo $\Leftrightarrow$).

I quantificatori danno una misura qualitativa della quantità di verità. Essi sono due:

quantificatore esistenziale – *Ex* o *esiste almeno un x tale che* (simbolo $\exists x$)

quantificatore universale – *Omn* o *per ogni x* (simbolo $\forall x$).

Se una formula quantificata esistenzialmente è vera, allora è vera per almeno un valore della variabile – ora considerato come individuo. Se è vera una formula quantificata universalmente, allora è vera per tutti gli individui.

Do ora le regole grammaticali con cui si costruiscono nuove formule a partire da formule ben formate, cioè formule in grado di assumere valori di verità. Come già detto si tratta di regole induttive, scritte usando metavariabili.

1. Variabili proposizionali e predicati sono fbf, a volte dette formule atomiche.

Siano $\alpha$ e $\beta$ fbf:

2. $\neg\alpha$ (si legge: *non* $\alpha$);
3. $\alpha \wedge \beta$ (si legge: $\alpha$ *et* $\beta$);
4. $\alpha \vee \beta$ (si legge: $\alpha$ *vel* $\beta$);
5. $\alpha \Rightarrow \beta$ (si legge: *se* $\alpha$ *allora* $\beta$ oppure $\alpha$ *implica* $\beta$);
6. $\exists x.\alpha(x)$ (si legge: *esiste almeno un x tale che* $\alpha(x)$);
7. $\forall x.\alpha(x)$ (si legge: *per ogni x* $\alpha$(x))

sono fbf. Nient'altro è fbf. Si dimostra che la formazione di una fbf è unica.

Il bicondizionale è dato per definizione da:

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ *sse* $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$ (si legge $\alpha$ *equivale a* $\beta$).

Si usa implicitamente la regola di sostituzione scrivendo $X$ come $X(x)$ e $X(x/y)$ come $X(y)$. La forza di connessione dei connettivi binari è in ordine crescente: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Per evitare ambiguità di interpretazione si usano parentesi tonde.

*Non solo Euclide*

Dopo l'alfabeto e la grammatica viene la sintassi, cioè il modo di operare sulle proposizioni e sui predicati connettendoli e quantificandoli.

Tuttavia, prima di passare ai dettagli tecnici della sintassi, suono il solito ritornello. La sintassi logica è una forma di matematica, quindi si può fare in tanti modi. Ho già accennato al modo euclideo di Frege: assiomi + regole di deduzione. Non vi darò gli assiomi di Frege per la semplice ragione che non seguirò l'approccio fregeano. Mi limito a dirvi che gli assiomi di Frege contengono solo due connettivi: l'implicazione (per esempio, nella la legge dell'*a fortiori*: $\alpha\Rightarrow(\beta\Rightarrow\alpha)$ e in una legge sillogistica di transitività) e la negazione (per esempio, in una variante della legge di contrapposizione: $(\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow(\neg\beta\Rightarrow\neg\alpha)$). Le regole fregeane sono tre: una, implicita, di sostituzione, realizzata attraverso l'uso di metavaribili e due esplicite: una è nota dal Medioevo come *modus ponendo ponens* o, più brevemente, *modus ponens*, l'altra è la regola di generalizzazione. Il *modus ponens* prevede che, se si deduce $\alpha$ e se si deduce $\alpha\Rightarrow\beta$, allora si può dedurre $\beta$. In formule, utilizzando il simbolo fregeano del giudizio $\vdash$, che afferma la verità di quanto lo segue, il *modus ponens* si scrive:

$$\frac{\begin{array}{l}\vdash \alpha\\ \vdash \alpha\Rightarrow\beta\end{array}}{\vdash \beta,}$$

da cui si vede bene la transitività della deduzione logica. La regola di generalizzazione fa da ponte tra calcolo proposizionale e predicativo. Consente di passare da $p$ all'universale $\forall x.p(x)$.

Il *modus ponens* è equivalente al *modus tollendo tollens* (o semplicemente *modus tollens*), su cui Popper ha fondato il suo falsificazionismo o epistemologia della conoscenza (che non è l'epistemologia della scienza!). Esso si scrive:

$$\frac{\begin{array}{l}\vdash \neg\beta\\ \vdash \alpha\Rightarrow\beta\end{array}}{\vdash \neg\alpha.}$$

A Popper il *modus tollens* serve per eliminare quel che non c'è: *non*$\alpha$ attraverso *non*$\beta$, per potersi adeguare a quel che c'è. Popper non afferra che alla scienza interessa quel che non c'è: l'infinito o l'oggetto del desiderio. Mi correggo. Popper sa benissimo cosa interessa alla scienza, ma opta per ciò che interessa al padrone, cioè l'oggetto della produzione. Come già Aristotele ai tempi di Alessandro, Popper è il maggiordomo dei servi dell'imperatore. In Italia un popperiano occupa la seconda carica dello Stato. Ciò dimostra il livello di servilismo cui è giunta la democrazia in Italia.

La ragione per cui non userò il modo fregeano di fare sintassi è che è troppo poco meccanico. Richiede un po' di fantasia, la comune fantasia dimostrativa del matematico medio, che tuttavia non posso pretendere da giovani psichiatri. Allora mi rivolgo a un metodo più meccanico. Non vi chiederò di fare dell'algebra, alla Boole per esempio, che è il vertice della meccanizzazione, perché troppo astratta per principianti. Tanto astratta che i suoi meccanismi servono bene a programmare altre macchine, per esempio i circuiti logici dei computer. Siccome non parlo a ingegneri lascerò l'argomento algebrico sullo sfondo e non l'approfondirò. Vi chiederò di apprendere il modo sintattico di Beth (nella presentazione di Smullyan e Fitting), che è un modo che mette tra parentesi gli assiomi e opera solo con regole di deduzione (o di trascrizione di fbf).

Naturalmente, se tenessi un seminario accademico in piena regola dovrei dimostrarvi che l'approccio di Beth equivale all'approccio di Frege, nel senso che entrambi portano agli stessi risultati (teoremi). Una volta tanto userò il principio di autorità per rassicurarvi sull'equivalenza, non solo di questi approcci ma di tante altre assiomatizzazione: alla Russell e Whitehead, alla Hilbert e Bernays, alla Ackermann, alla Post, alla Church ecc. Ormai dovreste averlo capito. Ai matematici piace fare cose diverse per poi dimostrare che sono (quasi) sempre uguali. Ovviamente il desiderio del matematico è scoprire la piccola differenza, se esiste. Si può sfruttare questa inclinazione del matematico per adottare la formalizzazione che più ci convince e che ci sembra più facile da usare per i nostri scopi.

Le unità di riferimento del metodo di Beth sono le formule marcate. Cosa sono le formule marcate? Sono fbf precedute dal contrassegno **V** o **F**, rispettivamente per "vero" e "falso". Poiché gli operatori (connettivi e quantificatori) sono sei e le marcature sono due, per formalizzare un calcolo, presunto completo, occorrono almeno dodici regole di trascrizione, che presento in questa tabella. (Le regole sono almeno tredici, se si conta come regola l'assioma di bivalenza, che, tuttavia, è incorporato nelle dodici regole, le quali trattano formule marcate con soli due valori: **V** o **F**).

$$
\begin{array}{rll}
 & \qquad\quad \mathbf{V} & \qquad\quad \mathbf{F} \\[4pt]
(non)\ \neg: & \dfrac{\{S,\ \mathbf{V}\neg\alpha\}}{\{S,\ \mathbf{F}\alpha\}}; & \dfrac{\{S,\ \mathbf{F}\neg\alpha\}}{\{S,\ \mathbf{V}\alpha\}}; \\[10pt]
(et)\ \wedge: & \dfrac{\{S,\ \mathbf{V}(\alpha \wedge \beta)\}}{\{S,\ \mathbf{V}\alpha,\ \mathbf{V}\beta\}}; & \dfrac{\{S,\ \mathbf{F}(\alpha \wedge \beta)\}}{\{S,\ \mathbf{F}\alpha\},\ \{S,\ \mathbf{F}\beta\}} \\[10pt]
(vel)\ \vee: & \dfrac{\{S,\ \mathbf{V}(\alpha \vee \beta)\}}{\{S,\ \mathbf{V}\alpha\},\ \{S,\ \mathbf{V}\beta\}}; & \dfrac{\{S,\ \mathbf{F}(\alpha \vee \beta)\}}{\{S,\ \mathbf{F}\alpha,\ \mathbf{F}\beta\}} \\[10pt]
(seq)\ \Rightarrow: & \dfrac{\{S,\ \mathbf{V}(\alpha \Rightarrow \beta)\}}{\{S,\ \mathbf{F}\alpha\},\ \{S,\ \mathbf{V}\beta\}}; & \dfrac{\{S,\ \mathbf{F}(\alpha \Rightarrow \beta)\}}{\{S,\ \mathbf{V}\alpha,\ \mathbf{F}\beta\}} \\[10pt]
(Ex)\ \exists: & \dfrac{\{S,\ \mathbf{V}\exists x.\alpha(x)\}}{\{S,\ \mathbf{V}\alpha(a)\}\ (a\ \text{nuovo})}; & \dfrac{\{S,\ \mathbf{F}\exists x.\alpha(x)\}}{\{S,\ \mathbf{F}\alpha(a)\}} \\[10pt]
(Omn)\ \forall: & \dfrac{\{S,\ \mathbf{V}\forall x.\alpha(x)\}}{\{S,\ \mathbf{V}\alpha(a)\}}; & \dfrac{\{S,\ \mathbf{F}\forall x.\alpha(x)\}}{\{S,\ \mathbf{F}\alpha(a)\}\ (a\ \text{nuovo})}
\end{array}
$$

dove *S* è un insieme di formule marcate **V** (vero) o **F** (falso), le quali vengono trascritte tali e quali durante la deduzione.

Come si legge la tabella? Quasi come la tabellina pitagorica. Se mi trovo di fronte a una formula marcata **V** mi pongo sulla prima colonna; se mi trovo di fronte a una formula marcata **F** mi pongo sulla seconda colonna. Poi scelgo la riga corrispondente all'operatore. Se, per esempio, mi trovo di fronte alla verità di una negazione (**V**¬), andrò nella casella all'incrocio della prima colonna (**V**) e della prima riga (¬). Lì leggo che la verità della negazione è la falsità dell'affermazione. La tabella prescrive di trascrivere **V**¬α in **F**α, lasciando immutate le formule dell'insieme *S*. L'insieme *S* conterrà formule che possono essere trascritte ai passi successivi e formule che rimarranno tali e quali in ogni passaggio successivo. Queste sono le formule atomiche del tipo **V***p* e **F***p* (oppure

**V**$p(a)$ e **F**$p(a)$, per qualche valore dell'argomento), che non sono ulteriormente analizzabili. Vedrete in seguito che nel caso della logica intuizionista questa condizione sarà indebolita.

Per dimostrare che una formula è una tesi si costruisce un albero binario rovesciato, cioè con la radice in alto e le foglie in basso. Si comincia dalla radice, falsificando la formula. Si prolunga un ramo deduttivo, applicando le regole di deduzione da un nodo dell'albero al successivo. In certi punti l'albero si biforca in due rami: in corrispondenza della verità dell'alternativa, della falsità della congiunzione e della verità dell'implicazione. Le prime due biforcazioni sono ovvie. Un'alternativa è vera se è vero almeno un suo termine. Pertanto, avendo dimostrato la verità di un'alternativa, bisogna continuare la dimostrazione in due direzioni: una parte dalla verità del primo termine dell'alternativa e l'altra dalla verità del secondo. Discorso duale vale per la falsità della congiunzione. La quale è falsa se almeno un termine della congiunzione è falso. Quindi la dimostrazione si sdoppia prendendo due strade: una parte dalla falsità di un termine della congiunzione, l'altra dalla falsità dell'altro. Più sottile giustificare la biforcazione in corrispondenza della verità dell'implicazione. Secondo lo stoico Filone di Megara, essa comporta o la falsità dell'antecedente o la verità del conseguente. La verità dell'implicazione fa suoi tre casi su quattro possibili. Alla falsità resta un unico caso, duale del precedente: verità dell'antecedente e falsità del conseguente.

La giustificazione della condizione che i valori delle variabili nella verificazione dell'esistenza e nella falsificazione dell'universalità siano nuovi è interessante da fissare. La verità dell'esistenza è la verità di un esempio. Chiamo $a$ tale esempio. Per mantenere la generalità della dimostrazione do a tale esempio un nome nuovo, che non ho già dato ad altri esempi. È come fare attenzione, costruendo un triangolo, che il terzo vertice non cada su uno dei precedenti, perché si otterrebbe un triangolo degenere, praticamente un segmento. (Vedrete nel caso intuizionista un'altra giustificazione). Analogamente la falsità dell'universalità implica la falsità di un esempio, che non deve essere già stato utilizzato per dimostrare altre falsità.

Con questo apparato di calcolo si ottiene una contraddizione del tipo $\{S, \mathbf{V}X, \mathbf{F}X\}$ in ogni foglia (ramo terminale) dell'albero se e solo se la formula è una tesi. Tale risultato dimostra che la falsificazione della formula alla radice dell'albero è impossibile, perché la formula è un teorema.

Tuttavia, prima di dare degli esempi del calcolo sintattico di Beth segnalo un'imprecisione, dovuta al modo di presentare il materiale. Ho mostrato sopra che la sintassi "salva" la verità non nominandola. Introducendo le formule marcate nel calcolo sintattico, non ho fatto altro che parlare di verità. Dove sta la contraddizione? Non sta in Beth che ha formulato anche un calcolo per formule non marcate. Se, poi, chiamassi un neopositivista logico a difendermi – un Carnap, per esempio – troverebbe l'*escamotage* che i segni **V** e **F** sono metalinguistici, quindi non appartengono alla sintassi. Apprezzo la difesa, ma non ne ho estremo bisogno. Tornerò sull'argomento quando affronterò in dettaglio il passaggio tra sintassi e semantica.

In questo caso la contraddizione è più apparente che reale. Dipende dal mio modo di presentare le cose, finalizzato alla logica intuizionista, che sarà la base delle prossime considerazioni di logica epistemica. Esistono calcoli sintattici per la logica intuizionista, formati da assiomi e regole di deduzione, i quali sono sintattici puri, nel senso che non fanno intervenire considerazioni di verità: sono i sistemi assiomatici di Heyting, allievo di Brouwer. Esistono anche calcoli intuizionisti sintattici puri, formati da sole regole, per esempio il calcolo dei sequenti di Gentzen. (Dove, tuttavia, le formule sono indirettamente marcate dalla posizione: le vere a sinistra del simbolo di Frege, le false a destra). I primi sistemi di calcolo sintattico non sono adatti a non matematici, perché hanno lo stesso difetto dei sistemi fregeani: richiedono fantasia dimostrativa. I secondi, invece, si prestano meglio a dimostrare metateoremi che teoremi. Perciò la scelta di presentare il calcolo di Beth mi sembra più adatta a questa sede, se si tollera qualche incongruenza.

*I grandi principi sono poca cosa*

Come esercizio per apprendere il meccanismo sintattico proposto da Beth proviamo a giustificare i principi ontologici della logica aristotelica. Il valore dell'esercizio in sé facile, oltre a confermare il nostro apprendimento, sta nel dimostrare che i cosiddetti principi primi sono in realtà principi secondi, per non dire secondari. Si deducono come teoremi in un sistema di scrittura astuto, tanto da colpire a morte la metafisica.

Cominciamo dal principio più antico, quello parmenideo, dell'identità, ossia dell'essere che è. Si scrive

$$p \Rightarrow p,$$

ma potrei scriverlo altrettanto bene $p \Leftrightarrow p$, per la definizione di bicondizionale. Per semplicità adotto la prima scrittura.

Nel calcolo di Beth la dimostrazione, come già annunciato, è sempre per assurdo. Nonostante la sua apparente astrattezza, dovuta al fatto che ammette l'inesistenza di quel che esiste o l'esistenza di quel che non esiste, la dimostrazione per assurdo è un'acquisizione relativamente precoce del pensiero occidentale. Certamente Pitagora – si parla di lui più che di ogni altro autore in questo primo seminario di logica! – e la sua scuola (parlo del VI secolo a.C) la conoscevano, se è vero che un pitagorico – il mitico Ipparco – arrivò a dimostrare l'irrazionalità del rapporto tra le misure della diagonale e del lato del quadrato. Ciò non toglie che sia difficile da apprendere perché controintuitiva. Infatti, non fa riferimento a pratiche quotidiane, come il cucire, il tessere, l'arare, il contare, il misurare ecc. In un certo senso fa riferimento alla funzione pura della negazione, la quale, come sappiamo da Freud, è difficile da definire perché non sempre nega. Addirittura per certi logici – tra questi Brouwer – la negazione dipenderebbe dall'assurdo. Negare significherebbe dedurre una contraddizione. Ci tornerò, se non sbaglio previsioni, nella seconda parte della serie di questi seminari.

Il primo passo della dimostrazione per assurdo consiste nella falsificazione:

$$\mathbf{F}(p \Rightarrow p),$$

cioè si ammette che il principio di identità sia falso. Lo scopo di questa mossa è di riuscire a trovare una contraddizione. Se si è fortunati e la si trova, si sarà guadagnata la dimostrazione della tesi. In questo caso la fortuna è a portata di mano.

Il secondo passo consiste nella trascrizione di questa formula marcata con **F**. Per farlo consulto la tabella "pitagorica". All'intersezione della quarta riga (⇒)con la seconda colonna (**F**) trovo la regola che mi dice come trascrivere la falsificazione dell'implicazione. Obbediente scrivo

$$\mathbf{V}p,\ \mathbf{F}p.$$

Ma questa è una contraddizione in termini (*contradictio in adjecto*). Contraddice l'assioma di bivalenza, secondo cui una variabile proposizionale può essere vera *o* falsa, ma non può essere vera *e* falsa contemporaneamente. Avendo trovato che è impossibile falsificare il principio di identità, abbiamo dimostrato che è un teorema e scriviamo

$$\vdash p \Rightarrow p.$$

Una variante del principio di identità è il principio di generalizzazione, che si dimostra analogamente.

Prima di passare alla dimostrazione del prossimo principio ontologico do una notizia storica. Le regole di trascrizione dell'implicazione non sono moderne. Risalgono a Filone di Megara, contemporaneo di Euclide, appartenente alla scuola stoica, fondata da Zenone di Cizio (da non confondere con Zenone l'eleatico, autore degli pseudoparadossi sul moto). La scuola stoica, il cui massimo rappresentante fu Crisippo, poligrafo di cui si sono perse tutte le opere, formulò una versione della logica – la logica si può fare in tanti modi – diversa da quella aristotelica: non predicativa, ma proposizionale e vero-funzionale, molto prossima all'algebra di Boole. In termini moderni, si può dire che gli Stoici anticiparono la semantica del calcolo proposizionale, mentre Aristotele costruì la sintassi di un frammento di calcolo predicativo. La semantica di Filone, parzialmente ripresa dai medievali, in particolare da Duns Scoto, nel detto *ex falso quodlibet* (dal falso si può dedurre sia il vero sia il falso), fu rimessa in auge da Frege e ne parliamo ancora oggi.

Passiamo ora al principio di non contraddizione, che Aristotele riteneva il principio fondamentale della sua logica perché per confutarlo occorre ancora il principio di non contraddizione. Questa volta lo Stagirita ha ragione.

In formule il principio di contraddizione si scrive:

$$\neg(p\wedge\neg p).$$

La falsificazione porta a scrivere:

$$\mathbf{F}\neg(p\wedge\neg p).$$

La tabella (prima riga, seconda colonna) ci dice come trattare la falsità della negazione. Si scrive la verità dell'affermazione:

$$\mathbf{V}(p\wedge\neg p).$$

La tabella-oracolo (seconda riga, prima colonna) ci dice come comportarci di fronte alla verità di una congiunzione. Si scrive la verità dei termini della congiunzione:

$$\mathbf{V}p,\ \mathbf{V}\neg p.$$

Cosa resta da fare? $\mathbf{V}p$ è immodificabile perché $p$ è una formula atomica e la verità, una volta acquisita, si mantiene tale e quale nel corso della dimostrazione (principio di monotonia del vero). Non resta che lavorare su $\mathbf{V}\neg p$. Come già sappiamo, si utilizza il risultato della casella all'intersezione della prima riga e della prima colonna, trascrivendo $\mathbf{V}\neg p$ come $\mathbf{F}p$. La dimostrazione termina con la contraddizione:

$$\mathbf{V}p\mathbf{,}\ \mathbf{F}p.$$

In conclusione dobbiamo dar ragione ad Aristotele. Si può dimostrare il principio di non contraddizione usando il principio di… contraddizione:

$$\vdash \neg(p\wedge\neg p).$$

Ho lasciato per ultimo il principio del terzo escluso (TE) perché funziona da anello di transizione tra logica classica (aristotelica, stoica, booleana) e logica intuizionista. La formula di partenza è

$$p\vee\neg p.$$

Falsificandola otteniamo:

$$\mathbf{F}(p\vee\neg p).$$

In base alla casella all'intersezione della terza riga con la seconda colonna trascriviamo la suddetta formula come

$\mathbf{F}p$, $\mathbf{F}\neg p$.

Se, come prima ho ammesso la monotonia del vero, ora ammetto la monotonia del falso, trascrivo $\mathbf{F}p$ tale e quale e trascrivo $\mathbf{F}\neg p$ come vuole la tabella (prima riga, seconda colonna), cioè scrivo $\mathbf{V}p$. Ottengo finalmente la contraddizione

$\mathbf{F}p$, $\mathbf{V}p$,

che dimostra TE:

$\vdash p \vee \neg p.$

Non dimenticate l'ipotesi suppletiva introdotta per dimostrare TE: la monotonia del falso. Tale ipotesi non varrà sempre in seguito. Non varrà per esempio in logica intuizionista. Di conseguenza cadranno alcuni principi della logica classica come TE e l'interdefinibilità dei quantificatori attraverso la doppia negazione:

$\vdash \exists x.p(x) \Leftrightarrow \neg\forall x.\neg p(x);$

$\vdash \forall x.p(x) \Leftrightarrow \neg\exists x.\neg p(x),$

di cui lascio la dimostrazione per esercizio.

Prima di passare alla semantica un osservazione che forse qualcuno a questo punto avverte confusamente ma non riesce a formulare. Ho detto che il pacchetto assiomatico di Frege contiene assiomi relativi alla negazione e all'implicazione. La domanda è come si possano dimostrare teoremi concernenti gli altri connettivi, partendo da assiomi che non li contengono. (Un problema che il calcolo di Beth non si pone, … non avendo assiomi). La risposta sta nel metateorema secondo cui in logica classica quattro connettivi sono ridondanti. Ne bastano due, purché uno sia sempre la negazione: negazione e alternativa, negazione e congiunzione, negazione e implicazione.

Concludo, per oggi, il discorso sintattico proponendo tre esercizi di diversa difficoltà. I primi due, più facili, riguardano l'*ars judicandi*, il secondo, meno facile, l'*ars inveniendi*. Si tenga presente, comunque, che gli esercizi non sono pleonastici né la semplice applicazione pedissequa della teoria. Sono un momento essenziale del lavoro epistemico collettivo.

ESERCIZIO 1. Formulare come fbf il *modus ponens* e il *modus tollens*.
ESERCIZIO 2. Dimostrare la validità delle due definizioni fregeane di $\wedge$ e$\vee$ in termini di $\neg$ e $\Rightarrow$:
$\vdash (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q);$
$\vdash (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q).$
ESERCIZIO 3. Trovare un modo per esprimere $(p \Rightarrow q)$ in termini di $\neg$ e $\wedge$ o $\neg$ e $\vee$ e giustificarlo.

(torna alla home)