CALCOLO DEGLI ENUNCIATI E TOPOLOGIA[*]

di Alfred Tarski (Warszawa)

traduzione dal tedesco di Antonello Sciacchitano[**]

0. PREMESSA

In questo lavoro desidero segnalare certe connessioni formali tra calcolo degli enunciati [o calcolo proposizionale] e topologia, nonché qualche altra teoria matematica. Si tratta innanzitutto dell'interpretazione topologica di due sistemi di calcolo proposizionale: l'ordinario binario, $\mathfrak{ZK}$, cioè a due valori di verità [vero o falso, *zweiwertiger Kalkül*], e l'intuizionista di Brouwer-Heyting, $\mathfrak{IK}$ [*intuitionistischer Kalkül*]. Ogni enunciato $\mathfrak{A}$[1] del calcolo proposizionale viene biunivocamente associato

---

[*] NOTA BIBLIOGRAFICA. Questo articolo è il testo di un intervento dell'autore al *Terzo Congresso Matematico Polacco* del 30 Settembre 1937 (cfr. *Annales de la Societé polonaise de mathématique*, vol. 16, 1937). Con il titolo *Der Aussagenkalkül und die Topologie*, comparve la prima volta in „Fundamenta Mathematicae", vol. 31, 1938, pp. 103-134; trad. inglese di J.H. Woodger, "Sentential Calculus and Topology" in A. Tarski, *Logic, Semantics and Metamathematics*, Oxford Univ. Press, Oxford 1956, pp. 421-454.

[**] NOTA DI TRADUZIONE. *Perché traduco "questo" Tarski?* In questo pregevole saggio, dove per la prima volta propone una semantica topologica per i due calcoli proposizionali allora in conflitto (anni Trenta del secolo scorso), quello binario o classico di Boole e quello intuizionista di Brouwer, Tarski dimostra tra l'altro che

1) condizione necessaria e sufficiente affinché sia modello del calcolo classico, uno spazio topologico deve essere isolato, in particolare non connesso;

2) condizione sufficiente affinché sia modello del calcolo intuizionista. lo spazio topologico deve essere infinito, a base numerabile, normale e contenere un insieme denso.

La cosa è curiosa. Il calcolo classico è stato per millenni il fondamento del logocentrismo, che basava l'ontologia sui tre assiomi di identità, non contraddizione e terzo escluso. Solo il secolo scorso il matematico si rese conto che tale fondamdento viene meno al compito primario del *logos*, che è di stabilire connessioni. Credo allora di capire perché il saggio di Tarski non abbia avuto la fortuna che meritava. Solo trent'anni dopo il lavoro di Tarski l'Accademia accettò come semantica ufficiale dell'intuizionismo (e del sistema modale S4 di Lewis) la proposta di Kripke: la categoria dei preordini (cfr. S.A. Kripke, "Semantical Analysis of intuitionistic Logic", in *Formal Systems and Recursive Functions. Proceedings of the eight Logic Colloquium. Oxford, July 1963* (eds. J.N. Crossley e M.A.E. Dummett) North Holland, Amsterdam 1965). La proposta di Tarski di una semantica topologica fu completamente rimossa, perfino da Kripke. Perché? Perché Tarski titillava l'intuizionismo, da sempre bestia nera del formalismo? Perché la dimostrazione è faticosa, certamente migliorabile? No, perché grazie alla topologia Tarski evidenziava, ma senza polemizzare, una fallacia al cuore stesso del logocentrismo: l'incapacità di connettere. L'Accademia, proprio perché logocentrica, non è così elastica da riconoscere e correggere subito i propri errori. Il saggio di Tarski non ha meritato neppure una citazione nei più noti manuali di storia della logica, anche là dove danno ampio spazio alla semantica tarskiana della verità come corrispondenza. L'Accademia non è scientifica. Essendo a servizio del padrone, o in generale dell'Uno, l'Accademia privilegia concezioni di verità come adeguamento piuttosto che come invenzione o riscoperta. Credo, pertanto, di aver fatto un buon lavoro culturale "riscoprendo" l'argomento di Tarski.

[1] [Tarski fa un uso specifico e ben differenziato dei diversi alfabeti e della tipografia. Usa le lettere gotiche per le espressioni composte da variabili enunciative elementari e loro insiemi. Alle variabili enunciative, alle funzioni e agli spazi strutturati (topologie, anelli) riserva le lettere latine, che usa anche come argomenti di funzioni o come valori designati di verità. Usa il corsivo grassetto latino per insiemi di insiemi (o sistemi), per esempio gli

all'enunciato $\mathfrak{A}_1$ della topologia in modo che l'enunciato $\mathfrak{A}$ sia dimostrabile nel calcolo proposizionale binario sse[2] l'enunciato $\mathfrak{A}_1$ è vero in ogni spazio topologico. Viene poi prescritta l'analoga traduzione per il calcolo intuizionista. Mi sembra che la presente trattazione interessi non solo dal punto di vista puramente formale, ma illumini in modo interessante i rapporti di contenuto tra i due sistemi di calcolo degli enunciati, nonché le loro sottostanti intuizioni.

A scanso di equivoci desidero espressamente far notare che non mi sono in alcun modo sforzato di adattare le usuali modalità di ragionamento alle pretese della logica intuizionista.[3, 4]

§ 1. I CALCOLI PROPOSIZIONALI BINARIO E INTUIZIONISTA.

Come è noto il *calcolo proposizionale* viene generalmente riconosciuto come la parte elementare della logica matematica. Nelle espressioni di tale calcolo ricorre un solo tipo di variabile. Infatti, le cosiddette *variabili proposizionali* [o enunciative] rappresentano l'intero enunciato. Come variabili proposizionali usiamo le lettere [maiuscole latine] *"X"*, *"Y"*, "*Z*"… Nel calcolo proposizionale accanto alle variabili compaiono quattro costanti: il *segno di implicazione* "$\rightarrow$" [*se… allora*], il *segno di disgiunzione* "$\vee$" [*oppure*, nel senso di *vel*], il *segno di congiunzione* "$\wedge$" [*e*] e il *segno di negazione* "$\sim$" [*non*]. (Non sarà presa in considerazione la quinta costante: il *segno di equivalenza* "$\leftrightarrow$" [*sse*]).

Qualunque *espressione*, composta da: variabili enunciative, costanti ed eventualmente parentesi, sarà indicata con le lettere [maiuscole gotiche diritte] "$\mathfrak{A}$", "$\mathfrak{B}$", "$\mathfrak{C}$", … Si assume che le variabili enunciative siano ordinate in una successione (infinita) di elementi tra loro distinti: $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \dots, \mathfrak{V}_n, \dots$ I simboli "$\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$", "$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$", "$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ ", indicano rispettivamente l'*implicazione*, la *disgiunzione* e la *congiunzione* di $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, quindi le espressioni composte che originano unendo $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ mediante le costanti corrispondenti "$\rightarrow$", "$\vee$", "$\wedge$". Analogamente si denota con "$\sim\mathfrak{A}$" la negazione di $\mathfrak{A}$.[5]

Accanto ai segni sopra elencati useremo la consueta simbologia insiemistica.

---

aperti di una topologia o gli ideali di un anello. Usa i caratteri bastone per indicare la dimensione semantica, prevalentemente attraverso le cosiddette matrici. Infine, usa il gotico grassetto per indicare i sistemi di calcolo proposizionale binario e intuizionista.]

[2] [Abbreviamo con "sse" l'espressione "se e solo se".]

[3] Ho riferito del presente lavoro il 30 settembre 1937 al III congresso matematico polacco (cfr. Ann. Soc. Pol. Math. 16 (1937), p. 192). I risultati risalgono in gran parte al 1935, ma la connessione tra calcolo intuizionista e algebra booleana (rispettivamente la teoria dei sistemi deduttivi, cfr. § 5) fu da me scoperta molto prima, già nel 1931. Alcune osservazioni in merito si trovano nei miei saggi in Fund. Math. 25 (1935), p. 514 e Ann. Soc. Pol. Math. 15 (1936), p. 187. Solo a stesura ultimata di questo articolo sono venuto a conoscenza del lavoro di M.H. Stone, recentemente apparso in Casopis Math. Fys. 67 (1937), p. 1 sg. Nonostante la concezione della logica brouweriana completamente diversa, c'è un certo legame tra i singoli risultati dei due lavori, come si può facilmente constatare confrontando il teorema 7 di Stone (p. 22) con il mio teorema 4.11; i contenuti dei due teoremi sono strettamente imparentati. Ma ciò non si può dire in alcun modo dei due lavori nel loro complesso. In particolare il teorema 4.24, in cui riconosco il fulcro del mio lavoro, sta su tutt'altra linea di pensiero rispetto al trattamento di Stone.

[4] Per il valido aiuto al compimento di questo lavoro devo ringraziare A. Mostowski.

[5] In linea di principio usiamo i segni "$\rightarrow$", "$\vee$", "$\wedge$" e "$\sim$" in due significati: logico e metalogico; in pratica si tratta solo del secondo. Nei §§ 4 e 5 viene del resto assegnato agli stessi segni un senso ancora diverso. [Tarski usa segni modificati rispetto all'uso comune. Per esempio, usa un ~ spigoloso.]

Tutte le espressioni del calcolo proposizionale, con cui avremo a che fare in seguito, appartengono ai cosiddetti enunciati:

Definizione 1.1. *L'espressione* $\mathfrak{A}$ *si dice* enunciato (*o* funzione enunciativa [*o* funzione proposizionale] *o* formula ben formata) *se* $\mathfrak{A}$ *appartiene ad ogni sistema che*

1. *contenga tutte le variabili enunciative* [*proposizionali*];
2. *sia chiuso rispetto alle operazioni di formazione dell'implicazione, disgiunzione, congiunzione e negazione*.

Insomma, il sistema di tutti gli enunciati è il sistema minimale che soddisfi le 1. *e* 2.

Ora distinguiamo all'interno del sistema di tutti gli enunciati due sistemi parziali: il sistema degli enunciati dimostrabili del calcolo proposizionale binario, $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$, e del calcolo intuizionista, $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$.

Definizione 1.2. *Si dice che l'enunciato* $\mathfrak{A}$ *è un* assioma del calcolo proposizionale binario, *rispettivamente* intuizionista*, se esistono enunciati* $\mathfrak{B}$*,* $\mathfrak{C}$*, e* $\mathfrak{D}$*, tali che* $\mathfrak{A}$ *soddisfi una delle seguenti formule* (i)–(x), *rispettivamente* (i)–(ix) *e* (xi):

(i) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\rightarrow(\mathfrak{C}\rightarrow \mathfrak{B})$, [*a fortiori*]
(ii) $\mathfrak{A} = [\mathfrak{B} \rightarrow (\mathfrak{C}\rightarrow\mathfrak{D})] \rightarrow [(\mathfrak{B} \rightarrow\mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{D})]$ [*legge di Frege*],
(iii) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\rightarrow(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})$ [*prima legge di introduzione di* ∨],
(iv) $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}\rightarrow(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})$ [*seconda legge di introduzione di* ∨],
(v) $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{D}) \rightarrow \{(\mathfrak{C}\rightarrow\mathfrak{D}) \rightarrow [(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})\rightarrow\mathfrak{D}]\}$ [*legge di eliminazione* ∨],
(vi) $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C})\rightarrow\mathfrak{B}$ [*prima legge di eliminazione di* ∧],
(vii) $\mathfrak{A} = ((\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C})\rightarrow\mathfrak{C}$ [*seconda legge di eliminazione di* ∧],
(viii) $\mathfrak{A} = (\mathfrak{D}\rightarrow\mathfrak{B}) \rightarrow \{(\mathfrak{D}\rightarrow\mathfrak{C}) \rightarrow [\mathfrak{D}\rightarrow(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C})]\}$[*legge di introduzione di* ∧],
(ix) $\mathfrak{A} = \sim\mathfrak{B}\rightarrow(\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{C})$[6] [*ex falso quodlibet o legge di Duns Scoto*],
(x) $\mathfrak{A} = (\sim\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B})\rightarrow\mathfrak{B}$ [*consequentia mirabilis forte* o *legge di Clavio*],
(xi) $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B}\rightarrow\sim\mathfrak{B})\rightarrow\sim\mathfrak{B})$ [*consequentia mirabilis negativa*].[7]

Definizione 1.3 *Siano* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *e* $\mathfrak{C}$ *tre enunciati e sia* $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$. *Allora si diche che* $\mathfrak{C}$ *è il* risultato della separazione dell'enunciato $\mathfrak{B}$ dall'enunciato $\mathfrak{A}$.

Definizione 1.4 *Il sistema* $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ *degli* enunciati dimostrabili nel calcolo binario, *rispettivamente il sistema* $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$ *degli* enunciati dimostrabili nel calcolo intuizionista, *sono i sistemi minimali di enunciati che contengono tra i propri elementi tutti gli assiomi del*

[6] [Per errore è riportata la formula $\mathfrak{A} = \sim\mathfrak{B}\rightarrow(\mathfrak{V}\rightarrow\mathfrak{C})$.]
[7] Cfr. analoghi sistemi assiomatici. Per il calcolo binario v. D. Hilbert e P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Berlin 1934, pp. 60 sg. Per il calcolo intuizionista v. G. Gentzen, Math. Zeitschr. 39 (1934), p. 419. Per la prima volta A. Heyting ha esplicitato un sistema assiomatico per il calcolo intuizionista in S.B. Preuß. Ak. Wiss. 1930, pp. 45 sg. Non entriamo qui nel merito della reciproca indipendenza degli assiomi 1.2 (o più precisamente degli schemi di assiomi 1.2).

calcolo binario, rispettivamente intuizionista, e sono chiusi rispetto all'operazione di separazione.[8]

Come è noto da queste definizione si possono dedurre i seguenti due teoremi:

Teorema 1.5 $\mathfrak{I}\mathfrak{K} \subset \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ (*ma non viceversa. Per esempio, se* $\mathfrak{v}$ *è una variabile enunciativa, allora* $\mathfrak{v} \vee \sim\mathfrak{v}$ [*legge del terzo escluso*] *e* $\sim\mathfrak{v} \vee \sim\sim\mathfrak{v}$ [*legge debole del terzo escluso o legge di Jankov*] *appartengono a* $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ *ma non a* $\mathfrak{I}\mathfrak{K}$).

Teorema 1.6. *Per ogni enunciato* $\mathfrak{A}$ *le seguenti condizioni sono equivalenti:*
(i) $\mathfrak{A} \in \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$,
(ii) $\sim\sim \mathfrak{A} \in \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$,
(iii) $\sim\sim \mathfrak{A} \in \mathfrak{I}\mathfrak{K}$.[9]

Per l'esatta giustificazione di questi teoremi (e degli altri che verranno dati in seguito) occorre naturalmente far riferimento, oltre alle suddette definizioni, a un appropriato sistema di "metacalcolo proposizionale". Ma è superfluo riportare qui in modo esplicito un siffatto sistema assiomatico.[10]

§ 2. Il metodo delle matrici.

Le definizioni del § 1 non offrono criteri per decidere nei singoli casi se l'enunciato $\mathfrak{A}$ sia dimostrabile, oppure no, nel calcolo proposizionale binario, rispettivamente, in quello intuizionista. Tale criterio è fornito dal cosiddetto *metodo delle matrici*.[11]

Definizione 2.1. *Siano dati un sistema* $\boldsymbol{W}$ *di oggetti qualsiasi, un elemento* $A \in \boldsymbol{W}$, *tre operazioni binarie* $\twoheadrightarrow$, Υ, ⅄ *e una unaria* ~. *Si assume la chiusura di* $\boldsymbol{W}$ *rispetto a queste operazioni e la validità della seguente condizione* [di conservazione della verità[12]]:

se $Y \in \boldsymbol{W}$ *e* $A \twoheadrightarrow Y = A$, *allora* $Y = A$.

---

[8] Nella 1.4 non occorre considerare la cosiddetta operazione di sostituzione, dato che il sistema assiomatico definito in 1.2 è chiuso rispetto a tale operazione.
[9] La prima parte del teorema 1.5 segue facilmente dalle 1.2–1.4 (basta dimostrare che ogni enunciato A della forma 1.2 (xi) appartiene a $\mathfrak{Z}\mathfrak{K}$). Per la seconda parte cfr. A. Heyting, cit. p. 56. Il teorema 1.6 fu stabilito da T. Glivenko in Bull. Acad. Sc. Belg. 1929, p. 183 sg. [Tarski sembra ignorare il lavoro di Andrei Kolmogorov, il quale nel 1925 dimostrò che la doppia negazione di una tautologia classica è intuizionisticamente valida, v. A. Kolmogorov, *O prinzipie Tertium non Datur*, Matematiceskii Sbornik, 32, (1925), p. 646 sg. Il lemma è importante perché dimostra che la logica intuizionista è un'estensione di quella binaria, dove le doppie negazioni si elidono.]
[10] Cfr. in proposito i miei lavori in Monatschr. Math Phys. 40, (1933), p. 100 e Stud. Phil. 1, (1936), p. 289.
[11] Cfr. J. Lukasiewicz e A. Tarski, C. R. Soc. Sc, Vars. 23, (1930), p. 33 sg. Il concetto di matrice viene colà concepito in maniera più ampia che non qui, essendo prese in considerazione matrici con più di un elemento designato (cfr. 2.1, 2.2). [Oggi si preferisce parlare di metodo dei *modelli*. Le matrici di Tarski sono in effetti modelli algebrici.]
[12] [Per dirimere un'ambiguità di lettura dovuta a mancanza di parentesi, ricordiamo che il segno di uguaglianza lega meno strettamente degli altri. La precedente espressione andrebbe scritta: *se* ($A \twoheadrightarrow Y$) $= A$, *allora* $Y = A$, cioè, se è vero che il vero implica *Y*, allora *Y* è vero.]

Si dice che la sestupla ordinata $\mathsf{M} = [\boldsymbol{W}, A, \twoheadrightarrow, \Upsilon, \curlywedge, \sim]$ *è una* matrice (logica normale).

Osservazione 2.2. Se $\mathsf{M} = [\boldsymbol{W}, A, \twoheadrightarrow, \Upsilon, \curlywedge, \sim]$ è una matrice, si dice talvolta che $\boldsymbol{W}$ è il *sistema di valori, A* l'*elemento designato* e che $\twoheadrightarrow, \Upsilon, \curlywedge, \sim$ sono le *operazioni di base* (*prima*, *seconda*, ecc.) di M.

Definizione 2.3. *Due matrici* $\mathsf{M}_1 = [\boldsymbol{W}_1, A_1, \twoheadrightarrow_1, \Upsilon_1, \curlywedge_1, \sim_1]$ *e* $\mathsf{M}_2 = [\boldsymbol{W}_2, A_2, \twoheadrightarrow_2, \Upsilon_2, \curlywedge_2, \sim_2]$ *si dicono* isomorfe *se esiste una funzione F che applichi biunivocamente* $\boldsymbol{W}_1$ *su* $\boldsymbol{W}_2$ *e soddisfi le seguenti formule*:

$F(A_1,) = A_2,$
$F(X \twoheadrightarrow_1 Y) = F(X) \twoheadrightarrow_2 F(Y),$
$F(X \Upsilon_1 Y) = F(X)\, \Upsilon_2\, F(Y),$
$F(X \curlywedge_1 Y) = F(X) \curlywedge_2 F(Y),$
$F(\sim_1 X) = \sim_2 F(X)$ *per qualsiasi* $X, Y \in \boldsymbol{W}$.

Corollario 2.4. [Equivalenza di matrici] *Ogni matrice* M *è isomorfa a se stessa; se* M_1 *è isomorfa a* M_2, *allora anche* M_2 *è isomorfa a* M_1; *se* M_1 *è isomorfa a* M_2 *e* M_2 *a* M_3, *allora* M_1 *è isomorfa a* M_3. (Per la 2.3).

Definizione 2.5. *Siano* $\mathsf{M} = [\boldsymbol{W}, A, \twoheadrightarrow, \Upsilon, \curlywedge, \sim]$ *una matrice e* $\mathfrak{A}$ *un enunciato. Le seguenti formule definiscono per ricorrenza la funzione* $F^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{M}}$ *che a ogni successione infinita di elementi* $X_1, \ldots, X_n, \ldots \in \boldsymbol{W}$ *associa un elemento* $F^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) \in \boldsymbol{W}$ *tale che:*

(i) $F^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = X_p$ *se* $\mathfrak{A} = \mathfrak{V}_p$, $(p = 1,2\ldots)$;
(ii) $F^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = F^{\mathfrak{B}}_{\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) \twoheadrightarrow F^{\mathfrak{C}}_{\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ *se* $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ ($\mathfrak{B}$ *e* $\mathfrak{C}$ *enunciati qualsiasi*);
(iii)-(iv) *analogamente per le operazioni* Υ *e* $\vee$, $\curlywedge$ *e* $\wedge$;
(v) $F^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = \sim F^{\mathfrak{B}}_{\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ se $\mathfrak{A} = \sim\mathfrak{B}$ (*B enunciato qualsiasi*).

Si dice che l'enunciato $\mathfrak{A}$ realizza [*o* soddisfa][13] la matrice M, *in formule* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{E}(\mathbf{M})$, *se* $F^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{M}}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = A$ *per qualsiasi* $X_1, \ldots, X_n, \ldots \in \boldsymbol{W}$.[14]

Osservazione 2.6. Talvolta si dice che la matrice M è *adeguata al sistema proposizionale* $\mathfrak{S}$ se $\mathfrak{E}(\mathsf{M}) = \mathfrak{S}$.

Corollario 2.7. *Se le matrici* M_1 *e* M_2 *sono isomorfe, allora* $\mathfrak{E}(\mathsf{M}_1) = \mathfrak{E}(\mathsf{M}_2)$. (Per le 2.1, 2.3, 2.5)

Definizione 2.8. *Siano* $\mathsf{M} = [\boldsymbol{W}, A, \twoheadrightarrow, \Upsilon, \curlywedge, \sim]$ *e* $\mathsf{M}_1 = [\boldsymbol{W}_1, A, \twoheadrightarrow, \Upsilon, \curlywedge, \sim]$ *due matrici tali che* $\boldsymbol{W}_1 \subset \boldsymbol{W}$. *Allora si dice che* M_1 *è una* sottomatrice *di* M.

---

[13] [Tarski usa il verbo *erfüllen*, lo stesso verbo usato da Freud per dire che il sogno realizza il desiderio, o *Wunsch*].
[14] Avremmo potuto formulare la 2.5 con funzioni di un numero finito di variabili, ma ciò avrebbe prodotto alcune diffifficoltà tecniche nelle considerazioni successive. Un'altra, ma equivalente, definizione dell'insieme $\mathfrak{E}(\mathsf{M})$ è data in Lukasiewicz-Tarski.

Corollario 2.9. *Se* M *è una matrice qualsiasi e* M_1 *una sottomatrice di* M, *allora* $€(\mathsf{M}) \subset €(\mathsf{M}_1)$. (Per le 2.1, 2.5, 2.8).

Definizione 2.10. ZK *indica la sestupla ordinata* $[\boldsymbol{W}, 1, \twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim]$, *dove* $\boldsymbol{W} = \{0, 1\}$, $x \twoheadrightarrow y = 1 - x + x.y$,[15] $x \curlyvee y = x + y - x.y$, $x \curlywedge y = x.y$ *e* $\sim x = 1 - x$ *per qualsiasi* $x,y \in \boldsymbol{W}$.

Come è noto si ha

Teorema 2.11 ZK *è una matrice e* $€(\mathsf{ZK}) = \mathfrak{ZK}$.[16]

Diversamente da $\mathfrak{ZK}$, non esiste matrice con sistema finito di valori adeguata al sistema $\mathfrak{IK}$.[17] Tuttavia, si può definire una successione infinita di matrici a valori finiti $\mathsf{IK}_1, \ldots, \mathsf{IK}_n, \ldots$ tale che risulti

$$\prod_{n=1}^{\infty} €(\mathsf{IK}_n) = \mathfrak{IK}.$$

Ora vogliamo descrivere come si costruisce questa successione.

Definizione 2.12. *Siano* $\mathsf{M} = [\boldsymbol{W}, B, \twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim]$ *una matrice e A un oggetto qualunque non appartenente a* $\boldsymbol{W}$. *Poniamo:*

(i) $\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{W} + \{A\}$;
(ii) $X \twoheadrightarrow^* Y = X \twoheadrightarrow Y$, *se* $X,Y \in \boldsymbol{W}$ *e* $X \twoheadrightarrow Y \neq B$;
$X \twoheadrightarrow^* Y = A$, *se* $X,Y \in \boldsymbol{W}$ *e* $X \twoheadrightarrow Y = B$;
$X \twoheadrightarrow^* A = A$ *per* $X \in \boldsymbol{W}^*$;
$A \twoheadrightarrow^* Y = Y$ *per* $A \in \boldsymbol{W}^*$;
(iii) $X \curlyvee^* Y = X \curlyvee Y$ *per* $X,Y \in \boldsymbol{W}$;
$Z \curlyvee^* A = A \curlyvee^* Z = A$ *per* $Z \in \boldsymbol{W}^*$;
(iv) $X \curlywedge^* Y = X \curlywedge Y$ *per* $X,Y \in \boldsymbol{W}$;
$Z \curlywedge^* A = A \curlywedge^* Z = Z$ *per* $Z \in \boldsymbol{W}^*$;
(v) $\sim^* X = \sim X$, *se* $X \in \boldsymbol{W}$ *e* $\sim X \neq B$;
$\sim^* X = A$, *se* $X \in \boldsymbol{W}$ *e* $\sim X = B$;
$\sim^* A = \sim B$.

La sestupla ordinata $[\boldsymbol{W}^*, A, \twoheadrightarrow^*, \curlyvee^*, \curlywedge^*, \sim^*]$ *si indica con* M^*.

Osservazione 2.13. Poiché il suo risultato dipende dalla scelta dell'elemento *A*, l'operazione matriciale sopra definita non è univoca. La circostanza non disturba le considerazioni successive finché le matrici ottenibili dalla matrice M mediante l'operazione * sono reciprocamente isomorfe. Del resto si può evitare la plurivocità di M^* costruendo una funzione insiemistica *F* che a ogni sistema $\boldsymbol{W}$ associ un oggetto

[15] [Tarski propone l'interpretazione filoniana del condizionale $x \rightarrow y$ come $\sim x \vee y$.]
[16] Questo teorema deriva facilmente dal noto teorema di completezza del calcolo proposizionale binario, dimostrato per la prima volta da E. Post, Am. Journ. Math. 43 (1921), p. 180, sg.
[17] Cfr. K. Gödel. Erg. Math. Koll., 4 (1933), p. 40. [K. Gödel, *Opere*, vol. 1 (1929-1936), Bollati Boringhieri, Torino 1999, p. 160.]

$F(\boldsymbol{W}) \notin \boldsymbol{W}$ e sostituendo nal 2.12 A con $F(\boldsymbol{W})$. (Prescindiamo qui da certe difficoltà che possono derivare dalla teoria logica dei tipi).

Corollario 2.14. *Se* M *è una matrice, allora anche* M* *è una matrice e* €(M*) ⊂ €(M). Se le matrici M_1 e M_2 sono isomorfe, allora sono isomorfe anche M_1^* e M_2^*. (Per 2.1, 2.3, 2.5, 2.12).

Definizione 2.15. *Siano n un numero naturale e* M = [$\boldsymbol{W}$, A, ⇻, ϒ, ⅄, ~] *una matrice. Poniamo*:

(1) $\boldsymbol{W}^n$*, il sistema delle n-ple ordinate* $[X_1, ..., X_n]$ *con* $X_1, ..., X_n \in \boldsymbol{W}$.
(2) $A^n = [X_1, ..., X_n]$, *con* $X_1 = ... = X_n = A$;
(3) $[X_1, ..., X_n] ⇻^n [Y_1, ..., Y_n] = [X_1 ⇻ Y_1, ..., X_n ⇻ Y_n]$ *per* $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n \in \boldsymbol{W}$;
(4), (5) *analogamente per* ϒ *e* ⅄;
(6) $\sim^n[X_1, ..., X_n] = [\sim X_1, ..., \sim X_n]$ *per* $X_1, ..., X_n \in \boldsymbol{W}$.

Si dice che [$\boldsymbol{W}^n$, A^n, $⇻^n$, $ϒ^n$, $⅄^n$, $\sim^n$] *è la* potenza n-esima *di* M *e si indica con* M^n.

Corollario 2.16 *Se n è un numero naturale e* M *è una matrice*, *allora* M^n *è una matrice e* €(M) = €(M^n); *se le matrici* M_1 *e* M_2 *sono isomorfe*, *lo sono anche* M_1^n *e* M_2^n.

Definizione 2.17 $\mathsf{IK}_1 = \mathsf{ZK}$, $\mathsf{IK}_{n+1} = ((\mathsf{IK}_n)^n)^*$ *per ogni naturale n.*

Sulla base di questa definizione si dimostra il seguente

Teorema 2.18. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{IK}$*, è che* $\mathfrak{A} \in$ €(IK_n) *per ogni numero naturale n; in altri termini*

$$\prod_{n=1}^{\infty} €(\mathsf{IK}_n) = \mathfrak{IK}.$$ [18]

Osservazione 2.19. È noto un rafforzamento del teorema. A ogni enunciato $\mathfrak{A}$ si associa il numero naturale n, dipendente solo dalla struttura di $\mathfrak{A}$, tale che $\mathfrak{A} \in$ €(IK_n) sse $\mathfrak{A} \in \mathfrak{IK}$.[14] Il criterio di decisione, annunciato all'inizio del paragrafo, è dato dalla 2.11 per il sistema $\mathfrak{ZK}$ e dal citato rafforzamento della 2.18 per il sistema $\mathfrak{IK}$.[19]

§ 3. SPAZI TOPOLOGICI.[20]

---

[18] Questo risultato è di S. Jaskowski. Cfr. il suo saggio in Act. Congr. Phil. Scient., Actualité Scient. Ind. 393, Paris 1936, p. 58 sg. La nostra presentazione differisce da quella di Jaskowski solo per dettagli inessenziali. L'operazione Γ di Jaskowski è sostituita dall'operazione *, definita in 2.12, che tuttavia produce gli stessi risultati.
[19] Un altro criterio di decisione per il calcolo intuizionista è in Gentzen, cit. nota 4.
[20] Per il seguito cfr. C. Kuratowski, *Topologie I,* Monogr. Mat. 3, Warszawa-Lwow 1931, in particolare pp. 15 sg., 38, 40, 82 sg., 95 e 101 sg. [L'approccio di Kuratowski alla topologia avviene attraverso l'operazione insiemistica di chiusura. A parte le difficoltà tipografiche di notazione, essa impone da subito alla trattazione topologica un carattere algebrico, che, se non le è essenzialmente estraneo, è meglio per motivi di chiarezza tenere distinto dal carattere primitivamente topologico, definito per esempio attraverso le famiglie caratteristiche di aperti o di intorni. L'algebra può essere convenientemente

Rammentiamo alcuni ben noti concetti topologici.

Definizione 3.1. *Si dice che l'insieme non vuoto R è uno* spazio topologico (*con l'operazione di chiusura* $\overline{}$ *come* operazione di base) *se soddisfa le seguenti condizioni:*

(i) *se* $X \subset R$, *allora* $\overline{\overline{X}} = \overline{X} \subset R$;
(ii) *se* $X \subset R$ *e* X *consiste di al più un elemento, allora* $\overline{X} = X$;[21]
(iii) *se* $X \subset R$ *e* $Y \subset R$, *allora* $\overline{X+Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ [*additività finita*].

Osservazione 3.2. Siano R uno spazio topologico e A un sottoinsieme non vuoto di R. Definiamo $\overline{}^{(A)}$ l'operazione [di chiusura] relativa ad A attraverso la formula: $\overline{X}^{(A)} = A \cdot \overline{X}$ per ogni $X \subset A$. In base alla 3.1 si può facilmente mostrare che A è uno spazio topologico con l'operazione di base $\overline{}^{(A)}$. Tale spazio si dice *sottospazio di R*.

Definizione 3.3 *Si dice che il sottoinsieme X dello spazio topologico R è* aperto (*in R*), *in formule*: $X \in \boldsymbol{O}(R)$, *se* $X = R - \overline{R-X}$.

Definizione 3.4. *Si dice che il sottoinsieme X dello spazio topologico R è* denso (*in R*) *se* $\overline{X} = R$.

Definizione 3.5. *Si dice che lo spazio topologico R è* isolato, *rispettivamente* denso in sé, *se* $x \notin \overline{R-\{x\}}$, *rispettivamente* $x \in \overline{R-\{x\}}$, *per ogni* $x \in R$.

Corollario 3.6. *Lo spazio topologico R è isolato sse* $X = \overline{X}$, *per ogni* $X \subset R$. (Per 3.1, 3.5).

Definizione 3.7 *Si dice che lo spazio topologico R è* normale *se*, *dati due insiemi qualsiasi* $X_1 \subset R$ *e* $X_2 \subset R$, *per cui* $\overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2 = 0$, *esistono due aperti disgiunti* $Y_1, Y_2 \in \boldsymbol{O}(R)$ *tali che* $\overline{X}_1 \subset Y_1$ *e* $\overline{X}_2 \subset Y_2$.

Definizione 3.8. *Si dice che lo spazio topologico R ha* base numerabile, *se esiste una successione di aperti non vuoti* $X_1, \ldots, X_n, \ldots \in \boldsymbol{O}(R)$ *tale che ogni aperto non vuoto* $Y \in \boldsymbol{O}(R)$ *si può scrivere nella forma* $Y = X_{i(1)} + \ldots + X_{i(n)} + \ldots$ *con* $i(1), \ldots, i(n), \ldots$ *successione di numeri naturali*).

Per le successive applicazioni segnaliamo una classe speciale di spazi topologici:

Definizione 3.9. *Si dice che lo spazio topologico R è un E*-spazio,[22] *se soddisfa la seguente condizione*:

---

introdotta in topologia *dopo* che questa sia stata definita in modo autonomo. Sono un esempio di questo modo di procedere i gruppi topologici, dove l'operazione di gruppo è compatibile con la continuità. La possibilità di introdurre l'algebra in topologia dimostra l'affinità di struttura tra algebra e topologia (confermata dall'inserimento della topologia nella teoria dei reticoli; cfr. § 5).]

[21] [Questo assioma, che si potrebbe dire di prenormalità (vedi avanti la definizione di spazi normali), esclude spazi topologici troppo grossolani. Solitamente la chiusura è definita dagli assiomi di Kuratowski:

(idempotenza) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; (estensività) $A \subset \overline{A}$; (invarianza del vuoto) $\overline{0} = 0$; additività finita.]

per ogni numero naturale n e per ogni aperto non vuoto $A \in \boldsymbol{O}(R)$ esistono aperti non vuoti a due a due disgiunti tali che

(1) $B_1 + \dots + B_n \subset A$ *e* $B_1 + \dots + B_n \neq A$,
(2) $\overline{A}-A \subset \overline{A-(B_1+\dots+B_n)}$,
(3) $A - (B_1 + \dots + B_n) \subset \overline{B}_1 \dots\ \overline{B}_n$.

Teorema 3.10. *Ogni spazio topologico R a base numerabile, denso in sé e normale è un E-spazio.*

Dimostrazione.[23] In conformità alla 3.8 esiste una successione infinita di insiemi C_1, …, C_k, … tali che:

(1) *gli insiemi* C_1, …, C_k, … *sono aperti non vuoti*;
(2) *ogni aperto non vuoto X si può scrivere nella forma* $X = C_{i(1)} + \dots + C_{i(k)} + \dots$

Essendo per ipotesi lo spazio R denso in sé e normale, dalla (2) consegue facilmente per le 3.5 e 3.7:

(3) *per ogni* $X \in \boldsymbol{O}(R)$ *non vuoto esiste un insieme* C_k *tale che* $\overline{C}_k \subset X$ *e* $\overline{C}_k \neq X$.

Consideriamo ora il numero naturale n e l'insieme A per cui

(4) $A \in \boldsymbol{O}(R)$ *e* $A \neq 0$;

costruiamo gli insiemi B_1, ..., B_n tali che

(5) B_1, ..., B_n *sono aperti non vuoti a due a due disgiunti;*
(6) $B_1 + \dots + B_n \subset A$ *e* $B_1 + \dots + B_n \neq A$;
(7) $\overline{A}-A \subset \overline{A-(B_1+\dots+B_n)}$;
(8) $A - (B_1 + \dots + B_n) \subset \overline{B}_1 \dots \overline{B}_n$.

Dimostriamolo dapprima per $n = 1$. Definiamo un insieme B tale che

(9) $B \in \boldsymbol{O}(R)$, $B \neq 0$, $B \subset A$, $B \neq A$,
(10) $\overline{A}-A \subset \overline{A-B}$ *e* $A-B \subset \overline{B}$.

---

[22] [Probabilmente il simbolo *E* sta per *echte*, "autentico". La terminologia tarskiana non ebbe fortuna. L'intero lavoro di Tarski subì la sorte censoria dell'intuizionismo di Brouwer, mai troppo amato dai formalisti dell'Accademia, prima hilbertiani, poi bourbakisti. Il destino dell'intuizionismo cambiò in parte da quando, trent'anni dopo Tarski, Kripke propose una semantica ordinale per l'intuizionismo e per la logica modale S4 di Lewis. (Cfr. Kripke, S., "Semantical analysis of intuitionistic logic" I, in *Formal systems and recursive functions,* North Holland, Amsterdam (1965), 92-130). Oggi l'intuizionismo è studiato in teoria delle categorie come esempio di *topos*, una generalizzazione (indebolimento) categoriale della teoria degli insiemi, che considera gli insiemi indipendentemente dalla relazione di appartenenza, come oggetti cui si applicano certe funzioni.]

[23] Originariamente ho dimostrato il teorema per la retta euclidea e i suoi sottoinsiemi densi in sé. Per la dimostrazione generale ringrazio S. Eilenberg.

Il modo più semplice per ottenere un siffatto insieme B è il seguente. Consideriamo gli insiemi $A_k = C_k \cdot (\overline{A}-A)$. Da ognuno di questi (che non è vuoto) scegliamo il punto a_k. Sia $D = \{a_1, ..., a_k, ...\}$. Come è facile dimostrare, è $\overline{A}-A \subset \overline{D}$. (Infatti, in caso contrario, per la (2) esisterebbe per $X = R-\overline{D}$ un insieme $C_k \subset R-\overline{D} \subset R-D$, che avrebbe elementi in comune con $\overline{A} - A$, contro la definizione di D). L'insieme D è al più numerabile e non vuoto (a prescindere dal caso banale $\overline{A}-A = 0$). Ordiniamo gli elementi di D nella successione infinita in modo che in tale successione ogni elemento $x \in D$ o ricorre una sola volta o un numero infinito di volte a seconda che $x \in \overline{D-\{x\}}$ oppure no.

Inoltre, in quanto spazio normale e a base numerabile, R è *metrizzabile*. Ciò significa che ad ogni coppia di punti $x, y \in R$ si può associare un numero reale $|x-y|$, *distanza tra x e y*, tale che

(i) $|x-y| = 0$ *sse* $x = y$, *per qualsiasi* $x,y \in R$;
(ii) $|x-y| + |x-z| \geq |y-z|$ *per qualsiasi* $x,y,z \in R$;
(iii) *se* $X \subset R$, *allora* $x \in \overline{X}$ *sse, per ogni* $r > 0$, *esiste un elemento* $y \in X$ *tale che* $|x-y| < r$.

Essendo $D \subset \overline{A}$, per la (iii) in corrispondenza di ogni $x \in D$ esistono punti $y \in A$ vicini quanto si vuole a x. Pertanto per ogni naturale k scegliamo un punto $e_k \in A$ con $|d_k - e_k| < 1/k$ e poniamo $B = A - \{e_1, ..., e_k, ...\}$. Non è difficile mostrare che B soddisfa le (9) e (10). (È essenziale che R sia denso in sé).

Si completa così il caso $n = 1$. Passiamo ora al caso generale. Ci serviamo dell'insieme B già definito.

Cominciamo ponendo per ogni $X \subset R$:

(11) $X^+ = R - \overline{R-\overline{X}}$.

Dalle (11), 3.1 e 3.3 si ottengono facilmente le seguenti regole di calcolo per l'operazione $^+$:

(12) $(X^+)^+ = X^+ \in \boldsymbol{O}(R)$ *per ogni* $X \subset R$;
(13) $X \subset X^+$ *e* $\overline{X} = \overline{X^+}$ *per ogni* $X \in \boldsymbol{O}(R)$;
(14) *se* $X \in \boldsymbol{O}(R)$, $Y \subset R$ *e* $X \subset \overline{Y}$, *allora* $X \subset Y^+$;
(15) *se* $X_1 + ... + X_n \subset R$ *e se gli insiemi* $\overline{X}_1, ..., \overline{X}_n$ *sono a due a due disgiunti, allora* $(X_1 + ... + X_n)^+ = X_1^+ + ... + X_n^+$.

Inoltre definiamo per ricorrenza la successione infinita di insiemi $G_1, ..., G_l ...$:

(16) $G_1 = C^+_k$, *con* k *il più piccolo naturale per cui* $\overline{C}_k \subset B$ *e* $\overline{C}_k \neq B$;
(17) $G_{k+1} = C^+_k$, *con* k *il più piccolo naturale per cui* $\overline{C}_k \subset B - \overline{G_1 + ... + G_l}$, *e* $\overline{C}_k \neq B - \overline{G_1 + ... + G_l}$.

Sulla base delle (1), (3), (9) e (13) si mostra facilmente per induzione che, grazie alle (16) e (17), si associa effettivamente a ogni naturale l un insieme G_l tale che

(18) G_l *è aperto, non vuoto e tale che:* $G_l^+ = G_l \subset \overline{G}_l \subset B$ *per ogni* l;
(19) *gli insiemi* $\overline{G}_1, ..., \overline{G}_l, ...$ (*e a maggior ragione gli insiemi* $G_1, ..., G_l, ...$) *sono a due a due disgiunti.*

Sia $C = B - \overline{G_1 + \ldots + G_l + \ldots}$. Per la (9) $C \in \boldsymbol{O}(R)$. Se C non fosse vuoto, per la (9) esisterebbe un intero k per cui $\overline{C}_k \subset C$ e $\overline{C}_k \neq C$; *a fortiori* si avrebbe $C_k \subset B - \overline{G_1 + \ldots + G_l}$ e $\overline{C}_k \neq B - \overline{G_1 + \ldots + G_l}$ per ogni l. Si deduce facilmente dalle (16) e (17) che C_k è identico a un G_l, da cui per (1) e (13) $\overline{C}_k = \overline{G}_l \subset B - \overline{G}_l$; pertanto l'insieme G_l deve essere vuoto in contraddizione con la (18). Conseguentemente $C = 0$, cioè

$B \subset \overline{G_1 + \ldots + G_l + \ldots}$;

da cui per la (10) $\overline{A} \subset \overline{A - B} + \overline{B} \subset \overline{B} \subset \overline{G_1 + \ldots + G_l + \ldots}$ D'altra parte per le (18) e (9) $G_1 + \ldots + G_l + \ldots \subset B \subset A$ e si conclude con

(20) $\overline{A} = \overline{G_1 + \ldots + G_l + \ldots}$

Vogliamo ora mostrare che

(21) *se* $X \in \boldsymbol{O}(R)$, $X \subset A$ *e* $X \not\subset G_1 + \ldots + G_l + \ldots$, *allora esistono infiniti interi* l *per cui* $X \bullet G_l \neq 0$.

A tale scopo consideriamo un insieme aperto $X \subset A$, che ha elementi in comune solo con un numero finito di insiemi G_l. Pertanto esiste un l_0 tale che $X \bullet G_l = 0$ per ogni $l > l_0$. L'insieme $Y = X - \overline{G_1 + \ldots + G_{l(0)}}$ non ha pertanto elementi in comune con l'intera somma $G_1 + \ldots + G_{l(0)} + \ldots$ Essendo inoltre $Y \in \boldsymbol{O}(R)$, si ha $Y \bullet \overline{G_1 + \ldots + G_{l(0)} + \ldots} = 0$, quindi per la (20) $Y \bullet \overline{A} = 0$ e a maggior ragione $Y \bullet A = 0$.

D'altra parte $Y \subset X \subset A$; quindi $Y = 0$, cioè $X \subset \overline{G_1 + \ldots + G_{l(0)}}$. Da qui si ottiene in base alle (14), (15) e (19): $X \subset (G_1 + \ldots + G_{l(0)})^+ \subset G_1^+ + \ldots + G_{l(0)}^+$, da cui per la (18): $X \subset G_1 + \ldots + G_{l(0)} \subset G_1 + \ldots + G_{l(0)} + \ldots$ In questo modo abbiamo dimostrato che ogni insieme aperto $X \subset A$, che abbia elementi in comune solo con un numero finito di G_l, è contenuto in $G_1 + \ldots + G_l + \ldots$. Contraponendo si ottiene la (21).

Siano

(22) $C_{p(1)}, \ldots, C_{p(k)}, \ldots$ *gli insiemi della successione* $C_1, \ldots, C_k, \ldots$ *contenuti in* A_1 *ma non in* $G_1 + \ldots + G_l + \ldots$

Si possono ripartire gli insiemi $G_1 \ldots G_l \ldots$ in n sistemi di insiemi $\boldsymbol{M}_1 \ldots \boldsymbol{M}_n$ tali che

(23) $\boldsymbol{M}_1 + \ldots + \boldsymbol{M}_n = \{G_1, \ldots, G_l, \ldots\}$;

(24) *i sistemi* $\boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_n$ *sono non vuoti e a due a due disgiunti;*

(25) *per ogni insieme* $C_{p(k)}$, $k = 1, 2. \ldots$, *e per ogni intero* j, $1 \leq j \leq n$, *esiste un insieme* $X \in \boldsymbol{M}_j$, *tale che* $C_{p(k)} \bullet X \neq 0$.

Per dimostrarlo si procede nel modo seguente. Per le (1), (22) e (21) esistono certamente n insiemi $G_{l(1)}, \ldots, G_{l(n)}$ che non[24] hanno elementi in comune con $C_{p(1)}$. Assegniamo gli insiemi $G_{l(j)}$, $1 \leq j \leq n$, al sistema $\boldsymbol{M}_j$. Analogamente esistono n insiemi $G_{l(n+1)}, \ldots, G_{l(2n)}$, distinti da $G_{l(1)}, \ldots, G_{l(n)}$, che non[25] hanno elementi in comune con $C_{p(2)}$. L'insieme $G_{l(n+j)}$, $1 \leq j \leq n$, è di nuovo assegnato al sistema $\boldsymbol{M}_j$. Chiaramente il procedimento può continuare all'infinito. Gli insiemi G_l eventualmente non assegnati

[24] [Nell'originale manca "non".]

[25] [*i.c.s.*]

possono essere assegnati arbitrariamente in un secondo momento al sistema $\boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_n$. (Per esempio, possono essere assegnati tutti al sistema $\boldsymbol{M}_1$).

Ora poniamo:

(26) $B_j = \sum_{X \in M_j} X$ *per* $j = 1, 2, \ldots$

Dalle (18), (19), (24) e (26) si vede immediatamente che gli insiemi $B_1, \ldots, B_n$, così definiti, soddisfano le condizioni (5). Per le (18), (23) e (26) si ha inoltre $B_1 + \ldots + B_n = G_1 + \ldots G_l + \ldots \subset B$ e conseguentemente $A–B \subset A–(B_1+ \ldots +B_n)$. Grazie alle (9) e (10) si ottengono la (6) e la (7). Assumiamo infine che la formula $A–(B_1 + \ldots + B_n) \subset B_j$ non valga per un certo j, $1 \leq j \leq n$. Sarà anche $A–\overline{B}_j \not\subset B_1 + \ldots +B_n = G_1 + \ldots + G_l + \ldots$, dove $A–\overline{B}_j$ è aperto per la (4). Sulla base delle (2) e (22) si conclude che esiste un insieme $C_{p(k)}$, contenuto in $A–\overline{B}_j$ e quindi disgiunto da B_j, in contraddizione con le (25) e (26). Perciò la supposizione di partenza è confutata e vale la (8).

Al tempo stesso abbiamo costruito, per ogni naturale n e per ogni aperto non vuoto A, gli insiemi $B_1, \ldots, B_n$, che soddisfano le condizioni (5)–(8). Quindi, per la 3.9, R è un E-spazio. C.V.D.

Osservazione 3.11. Dalla 3.10 risulta chiaramente che agli E-spazi appartengono anche gli spazi euclidei di dimensione qualsiasi. Anche i sottospazi densi in sé di uno spazio euclideo sono E-spazi.

§ 4. SIGNIFICATO TOPOLOGICO DEI CALCOLI PROPOSIZIONALI BINARIO E INTUIZIONISTA.

Sui sottoinsiemi di uno spazio topologico arbitrario definiamo quattro operazioni, indicate con gli stessi simboli delle analoghe sugli enunciati, di cui al § 1.

Definizione 4.1. *Sia R uno spazio topologico. Per insiemi qualsiasi $X \subset R$ e $Y \subset R$ poniamo:*

(i) $X \rightarrow Y = R–\overline{X–Y}$,[26]
(ii) $X \vee Y = X + Y$ (*l'usuale somma insiemistica*),
(iii) $X \wedge Y = X \bullet Y$ (*l'usuale intersezione insiemistica*),
(iv) $\sim X = X \rightarrow 0$ ($= R–\overline{X}$).[27]

Corollario 4.2. (i) *Se R è uno spazio topologico, $X \subset R$ e $Y \subset R$, allora $X \rightarrow Y$, $\sim X \in$ $\boldsymbol{O}(R)$, e precisamente $X \rightarrow Y$ è il più grande aperto Z tale che $X \bullet Z \subset Y$ e $\sim X$ è il più grande aperto disgiunto da X.*

(ii) *Se $X, Y \in \boldsymbol{O}(R)$, allora anche $X \vee Y$, $X \wedge Y \in \boldsymbol{O}(R)$ e precisamente $X \vee Y$ è il più piccolo aperto che contiene sia X sia Y, mentre $X \wedge Y$ è il più grande aperto contenuto sia in X sia in Y.* (Per le 3.1, 3.3, 4.1).

---

[26] [Tarski dà un modello stoico del condizionale $X \rightarrow Y$, inteso come $\sim(X \wedge \sim Y)$. Nella definizione di condizionale e nella negazione si passa attraverso gli aperti, intesi come complementi dei chiusi. Nel passaggio sta l'essenza della connessione tra logica e topologia.]

[27] [Tarski definisce la negazione come ciò che implica l'assurdo, qui l'insieme vuoto. Per l'assioma 1.2 (x) un'enunciato è assurdo, in senso scotiano, se implica tutti gli enunciati. La definizione di negazione come complemento del chiuso ha un significato reticolare. V. oltre.]

Corollario 4.3. *Sia R uno spazio topologico e* $X \subset R$ *e* $Y \subset R$. $X \to Y = R$ *sse* $X \subset Y$. *In particolare* $R \to Y = R$ *sse* $Y = R$. (Per 3.1, 4.1 (i)).

Corollario 4.4. *Sia R uno spazio topologico e* $X \subset R$. *Allora X è denso in sé sse* $\sim\sim X = R$. (Per 3.1, 3.4, 4.1 (iv)).

Definizione 4.5. *Si indica con* $\mathsf{O}(R)$ *la sestupla ordinata* $[\boldsymbol{O}(R), R, \to, \vee, \wedge, \sim]$, *dove R è uno spazio topologico*.

Teorema 4.6. $\mathsf{O}(R)$ *è una matrice per ogni spazio topologico R.* (Per 2.1, 3.1, 3.3, 4.2, 4.3, 4.5).

Come qualunque altra matrice, $\mathsf{O}(R)$ determina univocamente un sistema di enunciati. Nel caso determina $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$. Esamineremo più da vicino i rapporti tra questo sistema e i sistemi $\mathfrak{ZK}$ e $\mathfrak{IK}$.

Lemma. 4.7. *Sia R uno spazio topologico e* $\boldsymbol{S} = \{R, 0\}$. *Allora* $\mathsf{M} = [\boldsymbol{S}, R, \to, \vee, \wedge, \sim]$ *è una sottomatrice di* $\mathsf{O}(R)$ *isomorfa alla matrice* ZK.

La dimostrazione non presenta difficoltà per 2.1, 2.3, 2.8, 2.10, 3.1, 3.3 e 4.1.

Teorema 4.8. $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) \subset \mathfrak{ZK}$ *per ogni spazio topologico R*. (Per 2.7, 2.9, 2.11, 4.7).

Lemma 4.9. *Sia R uno spazio topologico e* $\mathfrak{A}$ *un assioma del calcolo intuizionista. Allora* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$.

La dimostrazione distingue dieci casi, a seconda della forma dell'assioma $\mathfrak{A}$ di 1.2. Poiché la conclusione è pressoché simile in tutti i casi, ne trattiamo solo uno: 1.2 (ix).
Sia allora

$$(1) \qquad \mathfrak{A} = \sim\mathfrak{B} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}),$$

dove $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ sono enunciati qualsiasi. Usando la 2.3 e tenendo conto delle 4.5 e 4.6 costruiamo le funzioni. $F^{\mathfrak{A}}{}_{\mathsf{O}(R)}$, $F^{\mathfrak{B}}{}_{\mathsf{O}(R)}$, $F^{\mathfrak{C}}{}_{\mathsf{O}(R)}$. Consideriamo la successione infinita di aperti $X_1, ..., X_n, ... \in \boldsymbol{O}(R)$ e poniamo

$$(2) \qquad \begin{aligned} F^{\mathfrak{A}}{}_{\mathsf{O}(R)}(X_1, ..., X_n, ...) &= X \\ F^{\mathfrak{B}}{}_{\mathsf{O}(R)}(X_1, ..., X_n, ...) &= Y \\ F^{\mathfrak{C}}{}_{\mathsf{O}(R)}(X_1, ..., X_n, ...) &= Z. \end{aligned}$$

Per le 2.5 (ii), (v) dalle (1) e (2) si ha $X = \sim Y \to (Y \to Z)$ da cui, per le 4.1 (i), (iv):

$$(3) \qquad X = (R-\overline{Y}) \to (Y \to Z) = R-\overline{(R-\overline{Y})-(R-\overline{\overline{Y}-Z})}.$$

Per la 3.1 (iii) $\overline{\overline{Y}-Z} \subset \overline{Y}$ e di conseguenza per $R-\overline{Y} \subset R-\overline{\overline{Y}-Z}$, dalle (3) e 3. 1 (ii) si ottiene $X = R$. Per la (2) si ha anche

$$F^{\mathfrak{A}}{}_{\mathsf{O}(R)}(X_1, ..., X_n, ...) = R \textit{ per qualsiasi } X_1, ..., X_n, ... \in \boldsymbol{O}(R),$$

da cui $\mathfrak{A} \in \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$, per la 2.5. C.V.D.

Lemma 4.10. *Siano R uno spazio topologico qualsiasi e* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ *tre enunciati tali che* $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$. *Allora, se* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$, *anche* $\mathfrak{C} \in \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$. *In altri termini, il sistema* $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$ *è chiuso rispetto all'operazione di separazione.*

Dimostrazione. Applicando la 2.5 e tenendo conto delle 4.5 e 4.6, costruiamo le funzioni $F^{\mathfrak{A}}{}_{\mathsf{O}(R)}$, $F^{\mathfrak{B}}{}_{\mathsf{O}(R)}$ e $F^{\mathfrak{C}}{}_{\mathsf{O}(R)}$. Per aperti arbitrari $X_1, \ldots, X_n, \ldots \in \boldsymbol{O}(R)$ abbiamo

(1) $F^{\mathfrak{A}}{}_{\mathsf{O}(R)}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = F^{\mathfrak{B}}{}_{\mathsf{O}(R)}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) \rightarrow F^{\mathfrak{C}}{}_{\mathsf{O}(R)}(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$,

da cui, essendo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$, segue

(2) $F^{\mathfrak{A}}{}_{\mathsf{O}(R)}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = R = F^{\mathfrak{B}}{}_{\mathsf{O}(R)}(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$.

Sulla base della 4.3 le formule (1) e (2) danno

(3) $F^{\mathfrak{C}}{}_{\mathsf{O}(R)}(X_1, \ldots, X_n, \ldots) = R$ *per arbitrari* $X_1, \ldots, X_n, \ldots \in \boldsymbol{O}(R)$.

Allora $\mathfrak{C} \in \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$ per la 2.5. Pertanto il sistema $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$ è chiuso rispetto all'operazione di separazione (cfr. 1.3). C.V.D.

Teorema* 4.11**. $\mathfrak{I}\mathfrak{K} \subset \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$ ***per ogni spazio topologico *R*.[28] (Per 1.4, 4.9, 4.10).

Teorema 4.12. *Le due condizioni*

(i) $\mathfrak{A} \in \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$
(ii) $\sim\sim\mathfrak{A} \in \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$

sono equivalenti per ogni spazio topologico R e ogni enunciato $\mathfrak{A}$. (Per 1.6, 4.8, 4.11).

Grazie ai teoremi 4.8 e 4.11, la doppia inclusione $\mathfrak{I}\mathfrak{K} \subset \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) \subset \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ vale per ogni spazio topologico *R*. Va segnalato che esistono spazi per i quali $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) = \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$ e spazi per i quali $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) = \mathfrak{I}\mathfrak{K}$. Infatti, la prima equazione vale sse *R* è uno spazio isolato (e, per così dire, degenere), mentre la seconda vale sempre per *E*-spazi, in particolare per spazi normali, densi in sé e a base numerabile. (cfr. 3.9-3.11).

Lemma 4.13. *Sia R uno spazio topologico. Condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni enunciato della forma della* consequentia mirabilis *forte* $\mathfrak{A} = (\sim\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B}$ (*dove* $\mathfrak{B}$ *è un enunciato qualsiasi*) *appartenga a* $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$, *è che R sia isolato.*

Dimostrazione. Sia *R* uno spazio isolato. Dalle 3.6 e 4.1 (i), (iv) segue facilmente che $(\sim X \rightarrow X) \rightarrow X = R$, per ogni $X \subset R$. Come nella dimostrazione della 4.9, sulla base delle 2.5, 4.5 e 4.6 si conclude che ogni enunciato $\mathfrak{A} = ((\sim\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B}) \in \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$.

---

[28] [Metto in rilievo questo teorema per due ragioni: l'analogia con il teorema 7 di M.H. Stone, segnalata dallo stesso Tarski, e la premessa per il rafforzamento del teorema 4.24, che si può ben chiamare teorema di Tarski.]

Sia inversamente $\mathfrak{A} = ((\sim\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B}) \in \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$. Per la 1.1 si può supporre in particolare che $\mathfrak{B}$ sia una variabile enunciativa, ad es. $\mathfrak{B} = \mathfrak{V}_1$. Per ogni successione di aperti $X_1, \dots, X_n, \dots$ si ha per le 2.5, 4.5 e 4.6

$$F^{\mathfrak{A}}_{\mathsf{O}(R)}(X_1, ..., X_n, ...) = (\sim X_1 \rightarrow X_1) \rightarrow X_1$$
$$F^{\mathfrak{B}}_{\mathsf{O}(R)}(X_1, ..., X_n, ...) = X_1.$$

Poiché $\mathfrak{A} \in \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$, si ha $(\sim X_1 \rightarrow X_1) \rightarrow X_1 = R$, da cui per la 4.3 $(\sim X_1 \rightarrow X_1) \subset X_1$. Inoltre, per le 3.1 e 4.1

$R–\overline{R–\overline{X}_1} \subset X_1$ per ogni $X_1 \in \boldsymbol{O}(R)$.

Se in particolare x è un elemento di R, allora in base alle 3.1 e 3. 3 si conclude che $R–\{x\} \in \boldsymbol{O}(R)$. Conseguentemente

$R–\overline{R–\overline{R–\{x\}}} \subset R–\{x\}$ e quindi

$\{x\} \subset \overline{R–\overline{R–\{x\}}}$.

Da qui discende immediatamente che $\overline{R–\{x\}} \neq R$ e $\overline{R–\{x\}} = R–\{x\}$. Si ha pertanto $x \notin \overline{R–\{x\}}$ per ogni $x \in R$. Ma ciò significa che lo spazio R è isolato (cfr. 3.5). C.V.D.

Teorema 4.14. *Sia R uno spazio topologico. Condizione necessaria e sufficiente affinché* $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) = \mathfrak{ZK}$ *è che R sia isolato.*

Dimostrazione. Lo spazio R sia isolato. Allora per le 1.2, 4.9 e 4.13 $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$ contiene tutti gli assiomi di $\mathfrak{ZK}$ e per la 4.10 risulta chiuso rispetto all'operazione di separazione. Di conseguenza per la 1.4 vale $\mathfrak{ZK} \subset \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$, da cui per la 4.8 $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) = \mathfrak{ZK}$. Inversamente, sia $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) = \mathfrak{ZK}$. Allora $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$ contiene tutti gli enunciati $\mathfrak{A} = (\sim\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B}$ (cfr. 1.2 (x) e 1.4). Quindi per la 4.13 lo spazio R è isolato. C.V.D.

Per procedere dobbiamo relativizzare le operazioni $\rightarrow$ e $\sim$.

Definizione 4.15.[29] *Siano R uno spazio topologico e* $A \subset R$. *Per insiemi qualunque* $X \subset R$ *e* $Y \subset R$ *poniamo*:

(i) $X \rightarrow_A Y = A–\overline{\overline{X}–Y}$,
(ii) $\sim_A X = X \rightarrow_A 0$ $(= A–\overline{X})$.

Corollario 4.16. *Siano R uno spazio topologico e* $A \subset R$, $X \subset R$, *e* $Y \subset R$. *Allora* $X \rightarrow_A Y \subset A$ *e* $\sim_A X \subset A$. *Se* $A \in \boldsymbol{O}(R)$, *allora* $X \rightarrow_A Y$, $\sim_A X \in \boldsymbol{O}(R)$. (Per 3.1, 3.3, 4.15).

Corollario 4.17. *Siano R uno spazio topologico e* $A \subset R$.

(i) *Se* $X \subset A$ *e* $Y \subset R$, *allora* $X \rightarrow_A Y = A$, *sse* $X \subset Y$.
(ii) *Se* $Y \subset A$, *allora* $A \rightarrow_A Y = A$, *sse* $Y = A$.
(iii) $X \rightarrow_A A = A$ *per ogni* $X \subset A$.
(iv) $A \rightarrow_A Y = Y$ *per ogni aperto* $Y \subset A$.

[29] [Qui Tarski propone una "Definizione ausiliaria" o "di servizio".]

(v) $\sim_A A = A \rightarrow_A 0 = 0$ *e* $\sim_A 0 = 0 \rightarrow_A 0 = A$. (Per 3.1, 3.3, 4.15)

Corollario 4.18. *Se R è uno spazio topologico, allora* $X \rightarrow_R Y = X \subset Y$ *e* $\sim_R X = \sim X$ *per qualsiasi* $X \subset R$ *e* $Y \subset R$. (Per 4.1 (i), (iv), 4.15).

Il lemma seguente generalizza la 4.7.

Lemma 4.19. *Se R è uno spazio topologico,* $A \subset R$, $A \neq 0$ *e* $\boldsymbol{T} = \{A, 0\}$ *, allora* $\mathsf{N} = [\boldsymbol{T}, A, \rightarrow_A, \vee, \wedge, \sim_A]$ *è una matrice isomorfa a* ZK. (Per 2.1, 2.3, 2.10, 3.1, 4.1 (ii), (iii), 4.17 (iii), (v)).

Lemma 4.20. *Premesse*:

(α) *R è uno spazio topologico;*
(β) $A, B \in \boldsymbol{O}(R)$, $B \subset A$, $B \neq A$, $\overline{A} - A \subset \overline{A - B}$ e $\overline{A} - B \subset B$;
(γ) *$\boldsymbol{S}$ è un sistema di insiemi aperti* $X \subset B$;
(δ) *se* $X, Y \in \boldsymbol{S}$ e $X - Y \neq 0$, *allora* $\overline{B} - B \subset \overline{X - Y}$;
(ε) $\mathsf{M} = [\boldsymbol{S}, B, \rightarrow_B, \vee, \wedge, \sim_B]$ *è una matrice*;
(ζ) $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} + \{A\}$ *e* $\mathsf{N} = [\boldsymbol{T}, A, \rightarrow_A, \vee, \wedge, \sim_A]$.

Conclusioni:

(i) *$\boldsymbol{T}$ è un sistema di aperti* $X \subset A$;
(ii) *se* $X, Y \in \boldsymbol{T}$ e $X - Y \neq 0$, *allora* $\overline{A} \subset \overline{X - Y}$.
(iii) N *è una matrice e* $\mathsf{N} = \mathsf{M}^*$.

Dimostrazione. Per gli assunti (α) e (β) e in considerazione della 3.1 si ha $B \subset \overline{B}$ e $A - B \subset \overline{B}$, da cui $A \subset \overline{B}$. Poiché $B \subset A$ abbiamo

(1) $\overline{A} = \overline{B}$ e $\overline{A} - A \subset \overline{B} - B$.

Per le (γ) e (ζ) si ottiene immediatamente la conclusione 4.20 (i) [, che ora indichiamo con]:

(2) *$\boldsymbol{T}$ è un sistema di aperti* $X \subset A$.

Dimostriamo la conclusione 4.20 (ii) [, che ora indichiamo con]:

(3) *se* $X, Y \in \boldsymbol{T}$ e $X - Y \neq 0$, *allora* $\overline{A} - A \subset \overline{X - Y}$.

Infatti, se $X - Y \neq 0$, allora per la (2) [4.20 (i)] $Y \neq A$, quindi, per la (ζ), $Y \in \boldsymbol{S}$. Se è anche $X \in \boldsymbol{S}$, allora dalle (δ) e (1) segue che

$\overline{A} - A \subset \overline{B} - B \subset \overline{X - Y}$.

Ma se $X \notin \boldsymbol{S}$, allora $X = A$ e, se $Y \neq B$, allora per la (γ) $B - Y \neq 0$ e, tenendo conto della (δ) e della (1), si ottiene

$\overline{A} - A \subset \overline{B} - B \subset \overline{B - Y} \subset \overline{X - Y}$

(essendo $B \in \boldsymbol{S}$ in virtù di (ε) e 2.1). Per $X{=}A$ e $Y{=}B$ si ottiene infine $\overline{A}–A \subset \overline{X–Y}$ direttamente dalla (β). La (3) [4.20 (ii)] vale pertanto in ogni caso.

L'operazione $\rightarrow_A$ ha le proprietà seguenti:

(4) *se* $X, Y \in \boldsymbol{S}$, *allora o* $X \rightarrow_A Y = A$ *o* $X \rightarrow_A Y = X \rightarrow_B Y$, *a seconda che o* $X \rightarrow_B Y = B$ *o* $X \rightarrow_B Y \neq B$;
(5) $X \rightarrow_A A = A$ *per ogni* $X \in \boldsymbol{T}$;
(6) $A \rightarrow_A Y = Y$ *per ogni* $Y \in \boldsymbol{T}$.

Se, in effetti, $X, Y \in \boldsymbol{S}$ e $X \rightarrow_B Y = B–\overline{X–Y} = B$, allora per la 4.17 (i) $X \subset Y$ e $X \rightarrow_A Y = A$ (essendo per le (β) e (γ) $X \subset B \subset A$). Ma se $X \rightarrow_B Y = B–\overline{X–Y} \neq B$, allora dalla (δ) segue $\overline{B}–B \subset \overline{X–Y}$, quindi, tenuto conto della (1): $A–\overline{X–Y} \subset A–(\overline{B}–B) = (A–\overline{B}) + B = B$ e perciò $A–\overline{X–Y} \subset B–\overline{X–Y}$. Poiché d'altra parte $B \subset A$ e conseguentemente $B–\overline{X–Y} \subset A–\overline{X–Y}$, si conclude che $A–\overline{X–Y} = B–\overline{X–Y}$, cioè $X \rightarrow_A Y = X \rightarrow_B Y$, che dimostra la (4). La (5) e la (6) si ottengono immediatamente dalla 4.17 (iii), (iv) e dalla (2) [4.20 (i)].
Dalla quale, in accordo con la 4.1 (ii), (iii), si ottiene ulteriormente:

(7) $Z \vee A = A \vee Z = A$ *e* $Z \wedge A = A \wedge Z = Z$ *per ogni* $Z \in \boldsymbol{T}$.

L'operazione $\sim_A$ soddisfa le seguenti condizioni:

(8) $\sim_A A = \sim_B B = 0$;

(9) *se* $X \in \boldsymbol{S}$, *allora* $\sim_A X = A$ *o* $\sim_A X = \sim_B X$, *a seconda che* $\sim_B X = B$ *o* $\sim_B X \neq B$.

La (8) segue direttamente dalla 4.17 (v). Grazie alla 2.1 e alla (ε) concludiamo a partire dalla (8) che $0 \in \boldsymbol{S}$. Ciò premesso, poniamo nella (4) $Y = 0$ e sulla base della 4.15 otteniamo immediatamente la (9).
Confrontando le condizioni (ε), (ζ) e le formule (4)-(9) con le 2.12 (i)–(v), constatiamo subito che

(10) $\mathsf{N} = \mathsf{M}^*$;

per la 2.14 si ha che

(11) N *è una matrice*.

La dimostrazione termina grazie alle (3), (10) e (11).

Lemma 4.21 *Premesse:*

(α) *R è uno spazio topologico;*
(β) $B_1, ..., B_n \in \boldsymbol{O}(R)$, $B_1, ..., B_n$, *sono insiemi non vuoti, a due a due disgiunti tali che* $B_1 + ... + B_n = B$ *e* $\overline{B}–B \subset \overline{B}_1 ... \overline{B}_n$;
(γ) *per* $p = 1, 2, ..., n$ $\boldsymbol{S}_p$ *è un sistema di insiemi aperti* $X \subset B_p$;
(δ) *se* $X, Y \in \boldsymbol{S}_p$, $(p = 1, 2, ..., n)$ *e* $X–Y \neq 0$, *allora* $\overline{B}_p–B_p \subset \overline{X–Y}$;
(ε) $\mathsf{M} = [\boldsymbol{W}, A, \twoheadrightarrow, \curlyvee, \curlywedge, \sim]$ *è una matrice;*

(ζ) *per* $p = 1,2, ..., n$, $\mathsf{M}_p = [\boldsymbol{S}_p, B_p, \twoheadrightarrow_{Bp}, \curlyvee, \curlywedge, \sim_{Bp}]$ *è una matrice isomorfa a* M;

(η) $\boldsymbol{S}$ *è il sistema di insiemi* $X = X_1 + ... + X_n$, *con* $X_1 \in \boldsymbol{S}_1, ..., X_n \in \boldsymbol{S}_n$, *e* $\mathsf{P} = [\boldsymbol{S}, B, n, \rightarrow_n, \vee, \wedge, \sim_n]$.

Conclusioni:

(i) $\boldsymbol{S}$ *è un sistema di insiemi aperti* $X \subset B$;

(ii) *se* $X, Y \in \boldsymbol{S}$ *e* $X - Y \neq 0$, *allora* $\overline{B} - B \subset \overline{X - Y}$;

(iii) P *è una matrice isomorfa a* M^n.

Dimostrazione. Dalle (β), (γ) e (η) segue facilmente la conclusione (1):

(1) *S è un sistema di aperti* $X \subset A$,

essendo ogni somma di aperti aperta per le 3.1 e 3.3.

Per dimostrare la (ii) consideriamo due insiemi $X, Y \in \boldsymbol{S}$ tali che $X - Y \neq 0$. Per la (η) $X = X_1 + \dots + X_n$ e $Y = Y_1 + \dots + Y_n$ con $X_p, Y_p \in \boldsymbol{S}_p$ per $p = 1,2, \dots, n$. Essendo $X_p \subset B_p$, $Y_p \subset B_p$, per le (γ) e (β), e gli insiemi $B_1, ..., B_n$ disgiunti a due a due, si ha chiaramente

$$X - Y = (X_1 + ... + X_n) - (Y_1 + ... + Y_n) = (X_1 - Y_1) + ... + (X_n - Y_n).$$

Se pertanto $X - Y \neq 0$, allora deve esistere un p, $1 \leq p \leq n$, per cui $X_p - Y_p \neq 0$. Da qui, per la (δ) $\overline{B}_p - B_p \subset \overline{X_p - Y_p}$ e a maggior ragione $\overline{B}_p - B_p \subset \overline{X - Y}$, poiché per le (α) e 3.1 (iii)

$$\overline{X - Y} = \overline{X_1 - Y_1} + \dots + \overline{X_n - Y_n}.$$

Ma per la (β) $\overline{B} - B = \overline{B} - (B + B_p) = (\overline{B} - B) - B_p \subset \overline{B}_p - B_p = \partial B_p$. Concludendo $\overline{B} - B \subset \overline{X - Y}$. Allora,

(2) *se* $X, Y \in \boldsymbol{S}$ *e* $X - Y \neq 0$, *allora* $\overline{B} - B \subset \overline{X - Y}$.

Passiamo ora alla (iii). In accordo con le 2.15, 2.16 e (ε), costruiamo la matrice: $\mathsf{M}^n = [\boldsymbol{W}^n, A^n, \twoheadrightarrow^n, \curlyvee^n, \curlywedge^n, \sim^n]$. Poiché, per le (ζ) e 2.4, M è isomorfa a $\mathsf{M}_1, ..., \mathsf{M}_n$, per la 2.3 esistono funzioni $F_1, \dots, F_n$, che istituiscono tale isomorfismo, applicando $\boldsymbol{W}$ in modo biunivoco su $\boldsymbol{S}_1, \dots, \boldsymbol{S}_n$. Poniamo:

(3) $F(U) = F_1(U_1) + ... + F_n(U_n)$ *per* $U = [U_1, ..., U_n] \in \boldsymbol{W}_n$.

Poiché in questo caso $F_p(U_p) \in \boldsymbol{S}_p$, $(p = 1,2, ..., n)$, da cui, per la (iii), $F_p(U_p) \subset B_p$, e gli insiemi $B_1, ..., B_n$, sono disgiunti a due a due, allora, per la (η),

(4) *la funzione F applica* $\boldsymbol{W}^n$ *in modo biunivoco su* $\boldsymbol{S}$.

Dalle 2.3, 2.15 e (β) si ha:

(5) $F(A^n) = F_1(A) + \dots + F_n(A) = B_1 + ... B_n = B$.

Sia inoltre

(6) $U = [U_1, \dots, U_n] \in \boldsymbol{W}^n$ e $V = [V_1, \dots, V_n] \in \boldsymbol{W}^n$.

Per 2.15, (6), (3), 2.3 e 4.15 (i) si ha

$$(7)\ F(U^n \twoheadrightarrow^n V) = F([U_1 \twoheadrightarrow V_1, \ldots, U_n \twoheadrightarrow V_n]) =$$
$$= F_1(U_1 \twoheadrightarrow V_1) + \ldots + F_n((U_n \twoheadrightarrow V_n) =$$
$$= (F_1(U_1) \ \rightarrow_{B1} F_1(V_1)) + \ldots + (F_n(U_n)) \rightarrow_{Bn} F_n(V_n)) =$$
$$= (B_1 - \overline{F_1(U_1) - F_1(V_1)}) + \ldots + (B_n - \overline{F_n(U_n) - F_n(V_n)}).$$

Per $p, q = 1,2, \ldots, n$ e $p \neq q$ $F_p(U_p) \in S_p$, $F_q(U_q) \in S_q$, quindi per (iii) e (ii):

$$F_p(U_p) \subset B_p,\ F_q(V_q) \subset B_q,\ F_p(U_p) \bullet B_q = F_p(U_p) \bullet F_q(V_q) = 0;$$

poiché $B_q \in \boldsymbol{O}(R)$, è anche $\overline{F_{\overline{p}}(U_p) - F_p(V_p)} \bullet B_q = 0$. Tenuto conto di questo, dalla (7) e dalla 3.1 (iii) risulta:

$$(8)\ F(U \twoheadrightarrow^n V) =$$
$$= (B_1 + \ldots + B_n) - (\overline{F_1(U_1) - F_1(V_1)} + \ldots + (\overline{F_n(U_n) - F_n(V_n)}) =$$
$$= B - \overline{(F_1(U_1) - F_1(V_1)) + \ldots + (F_n(U_n) - F_n(V_n))} =$$
$$= B - (F_1(U_1) + \ldots + F_n(U_n)) - (F_1(V_1)) + \ldots + F_n(V_n));$$

per la 4.15 le (3), (6) e (8) danno:

$$(9)\ F(U \twoheadrightarrow^n V) = B - \overline{F(U) - F(V)} = F(U) \rightarrow_B F(V) \textit{ per qualsiasi } U, V \in \boldsymbol{W}^n.$$

In modo analogo ma più semplice si ottengono le formule:

$$10)\ F(U \curlyvee^n V) = F(U) \vee F(V) \textit{ e } F(U \curlywedge^n V) = F(U) \wedge F(V) \textit{ per } U, V \in \boldsymbol{W}^n;$$

$$(11)\ F(\sim^n U) = \sim_B F(U) \textit{ per } U \in \boldsymbol{W}^n.$$

Dalle (4), (5), (9)–(11) si conclude, grazie alle 2.1, 2.15 e 2.16, che $B \in \boldsymbol{S}$ e che $\boldsymbol{S}$ è chiuso in rapporto a $\rightarrow_B$, $\vee$, $\wedge$, $\sim_B$. Con riferimento alle (η), (1) e 4.17 si ha anche che P è una matrice. Inoltre si constata – di nuovo a partire dalle (4), (5), (9), (11) – che le matrici P e M^n soddisfano le condizioni della definizione 2.3. Conseguentemente,

(12) P è una matrice isomorfa a M^n.

Per le (1), (11) e (12) le conclusioni del lemma sono verificate.

Lemma 4.22 *Premesse:*

(α) *R è un E-spazio*;
(β) M *è una matrice*;
(γ) *per ogni aperto non vuoto $B \in \boldsymbol{O}(R)$ esiste un sistema $\boldsymbol{S}$ di aperti $X \subset A$ tale che*
(γ_1) *se $X, Y \in \boldsymbol{S}$ e $X - Y \neq 0$, allora $\overline{B} - B \subset \overline{X - Y}$*;
(γ_2) $\mathsf{M}' = [\boldsymbol{S}, B, \rightarrow_B, \vee, \wedge\ \sim_B]$ *è una matrice isomorfa a* M.

Conclusione: per ogni naturale n e per ogni aperto non vuoto $A \in \boldsymbol{O}(R)$ esiste un sistema $\boldsymbol{T}$ di aperti $X \subset A$ tale che

(i) *se* $X, Y \in \boldsymbol{T}$ *e* $X-Y \neq 0$, *allora* $\overline{A}-A \subset \overline{X-Y}$;
(ii) $\mathsf{N} = [\boldsymbol{T}, A, \rightarrow_n, \vee, \wedge, \sim_n]$ *è una matrice isomorfa a* $(\mathsf{M}^n)^*$.

Dimostrazione. Siano n un numero naturale e A un aperto non vuoto. Per le 3.9 e (α) esistono insiemi tali che

(1) $B_1, ..., B_n$ *sono aperti non vuoti a due a due disgiunti;*
(2) $B_1 + ... + B_n = B \subset A$ *e* $B \neq A$;
(3) $\overline{A}-A \subset \overline{A-B}$;
(4) $A-B \subset \overline{B}_1 ... \overline{B}_n$.

Dalle (2)–(4) si ottiene facilmente:

(5) $\overline{B}-B \subset \overline{A}-B = (\overline{A}-A) + (A-B) = \overline{A}-A + (A-B) \subset \overline{B}_1 \dots \overline{B}_n$.

Per le (β) e (γ) esiste un sistema di insiemi $\boldsymbol{S}_1, \dots, \boldsymbol{S}_n$ tali che

(6) *per* $p = 1, 2, \dots, n$, $\boldsymbol{S}_p$ *è un sistema di aperti* $X \subset B$;
(7) *se* $X, Y \in \boldsymbol{S}_p$ *e* $X-Y \neq 0$, *allora* $\overline{B}-B \subset \overline{X-Y}$;
(8) *per* $p = 1, 2, \dots, n$, *la matrice* $\mathsf{M}_p = [\boldsymbol{S}_p, B_p, \rightarrow_{Bp}, \vee, \wedge \sim_{Bp},]$ *è isomorfa a* M.

Ora poniamo

(9) $\boldsymbol{S} = \{$*sistem degli insiemi* $X = X_1 + ... + X_n$, *dove* $X_1 \in \boldsymbol{S}_1, ..., X_n \in \boldsymbol{S}_n\}$;
$\mathsf{P} = [\boldsymbol{S}, B, \rightarrow_B, \vee, \wedge, \sim_B]$.

Per le (α), (β), (1), (2) e (5)-(9) i presupposti del lemma 4.21 sono soddisfatti. Quindi

(10) $\boldsymbol{S}$ *è un sistema di aperti* $X \subset A$;
(11) *se* $X, Y \in \boldsymbol{S}$ e $X-Y \neq 0$, *allora* $\overline{B}-B \subset \overline{X-Y}$;
(12) P *è una matrice isomorfa a* M^n.

Sia

(13) $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} + \{A\}$ *e* $\mathsf{N} = [\boldsymbol{T}, A, \rightarrow_A, \vee, \wedge, \sim_A]$.

Per le (α), (1)–(4) e (9)–(13) valgono i presupposti del lemma 4.20. Conseguentemente si ha:

(14) $\boldsymbol{T}$ *è un sistema di aperti* $X \subset A$;
(15) *se* $X, Y \in \boldsymbol{T}$ e $X-Y \neq 0$, *allora* $\overline{A}-A \subset \overline{X-Y}$;
(16) N *è una matrice e* $\mathsf{N} = \mathsf{P}^*$.

Dalle (12) e (16) si ottiene sulla base di 2.14:

(17) N *è una matrice isomorfa a* $(\mathsf{M}^n)^*$

Con riguardo alle (14), (15) e (17) il lemma 4.22 è completamente dimostrato.

Lemma 4.23. *Se R è uno spazio topologico, allora, per ogni numero naturale n, la matrice* O(R) *contiene una sottomatrice isomorfa a* IK_n.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione la tesi più forte:

(1) *per ogni aperto non vuoto* $A \in \boldsymbol{O}(R)$ *esiste un sistema* $\boldsymbol{T}$ *di aperti* $X \subset A$ *tali che*

(i) se $X, Y \in \boldsymbol{T}$ e $X–Y \neq 0$, *allora* $\bar{A}–A \subset X–Y$
(ii) $\mathsf{N} = [\boldsymbol{T}, A, \rightarrow_A, \vee, \wedge, \sim_A]$ *è una matrice isomorfa a* IK_n.

Per le 2.17 e 4.19 la (1) vale effettivamente per $n = 1$. Posto che la (1) valga per un naturale qualsiasi n, applichiamo il lemma a ($\mathsf{M} = \mathsf{IK}_n$). Si vede vacilmente, grazie alla 2.17, che la (1) vale anche per n+1.
Ponendo nella (1) $A = R$, dalle 2.8, 3.1, 3.2, 4.5 e 4.18 si deduce il lemma.

***Teorema* 4.24. *Se R è un E-spazio, allora* $\mathfrak{E}$(O(R)) = $\mathfrak{IK}$.**[30]

Dimostrazione. Per il lemma precedente, per ogni interno n, esiste una sottomatrice N_n isomorfa a IK_n. Se $\mathfrak{A} \in \mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$, allora per le 2.9 e 2.7 si ha $\mathfrak{A} \in \mathfrak{E}(\mathsf{N}_n) = \mathfrak{E}(\mathsf{IK}_n)$ per $n = 1, 2,\ldots$ e quindi per la 2.18: $\mathfrak{A} \in \mathfrak{IK}$. Pertanto $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) \subset \mathfrak{IK}$. Dalla 4.9 si ottiene infine $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) = \mathfrak{IK}$. C.V.D.

Osservazione 4.25. Si può dimostrare facilmente il seguente teorema:

Sia R uno spazio topologico, A un aperto non vuoto contenuto in R, $\boldsymbol{T}$ *il sistema degli aperti* $X \subset A$ *e* $\mathsf{N} = [\boldsymbol{T}, A, \rightarrow_A, \vee, \wedge, \sim_A]$. *In queste condizioni* N *è una matrice e* $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) \subset \mathfrak{E}(\mathsf{N})$; *se in particolare* $\mathfrak{E}(\mathsf{N}) = \mathfrak{IK}$, *allora* $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) = \mathfrak{IK}$.

Si vede da qui che il teorema 4.24 non è invertibile. La formula $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) = \mathfrak{IK}$ vale, per esempio, per tutti gli spazi normali a base numerabile, che contengono un insieme aperto denso in sé e, più in generale, per ogni spazio R che contiene un E-sottospazio aperto (3.2), indipendentemente dall'essere R un E-spazio.
D'altra parte, esistono spazi R tali che la loro matrice O(R), pur non essendo adeguata né al sistema di enunciati $\mathfrak{ZK}$ né al sistema $\mathfrak{IK}$, è adeguata a un "sistema intermedio". Se ne trovano esempi tra spazi normali a base numerabile e senza base numerabile. Si conoscono spazi normali densi in sé tali che

se $X \in \boldsymbol{O}(R)$, *allora* $\bar{X} \in \boldsymbol{O}(R)$.[31]

Per la 4.14 per ciascuno di tali spazi il sistema $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$ è diverso da $\mathfrak{ZK}$; al tempo stesso non è difficile dimostrare che tale sistema contiene enunciati $\mathfrak{A}$ della forma: $\mathfrak{A} = {\sim}\mathfrak{B} \vee {\sim\sim}\mathfrak{B}$ e pertanto non può coincidere con $\mathfrak{IK}$.
Il problema di coordinare esattamente le proprietà topologiche dello spazio R alle proprietà logiche (o meglio metalogiche) del corrispondente sistema di enunciati $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R))$ non è affatto risolto in modo esauriente.

---

[30] [Vedi nota 28.]
[31] [Si dice *non connesso* uno spazio dove esistano aperti, diversi dall'insieme vuoto e dall'intero spazio, che siano chiusi. Cfr. NOTA DI TRADUZIONE.]

Vogliamo ora presentare in forma più intuitiva e trasparente alcuni risultati acquisiti.

Sia $\mathfrak{A}$ una funzione enunciativa del calcolo degli enunciati dove, accanto alle costanti "→", "∨", "∧" e "~", compaiono le variabili "*X*", "*Y*", "*Z*"… Assegnamo all'espressione $\mathfrak{A}$ la forma schematica:

$$\mathfrak{A} = \text{“}\varphi(X,Y,Z,\ldots)\text{”}.$$

Assumiamo che le variabili "*X*", "*Y*", "*Z*"… non rappresentino enunciati ma denotino insiemi di punti di uno spazio topologico *R*. Scriviamo le costanti "→", "∨", "∧" e "~" nel senso [estensionale] chiarito nella definizione 4.1. In questo senso $\mathfrak{A}$ non è una funzione enunciativa ma una funzione di denotazione: denota un insieme dello spazio *R*, esattamente come le variabili "*X*", "*Y*", "*Z*"… Tenendo presente ciò, formiamo gli enunciati $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$:

$\mathfrak{A}_1$ = "*Siano X,Y,Z, … aperti dello spazio R. L'insieme* $\varphi(X,Y,Z,\ldots)$ *è denso in sé*".

$\mathfrak{A}_2$ = "*Siano X,Y,Z, … aperti dello spazio R.* $\varphi(X,Y,Z,\ldots) = R$".

(A rigore $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$ non sono enunciati ma funzioni enunciative, dato che vi compaiono variabili libere, per esempio *R*. [Bisognerebbe scrivere $\varphi_R(X,Y,Z,\ldots)$]).

Consideriamo ora le due espressioni: "$\mathfrak{A}_1$ *è valida* (*o è soddisfatta*) *in R*" e "$\mathfrak{A}_2$ *è valida* (*o è soddisfatta*) *in R*". Il loro senso sembra chiaro. Ciononostante, tentare di precisarne formalmente il senso va incontro a certe difficoltà.[32] Grazie alla 2.5, un modo per cavarsela è di considerare la seconda espressione equivalente a "$\mathfrak{A}$ *soddisfa la matrice* $\mathsf{O}(R)$". Per la 4.4, la definizione della prima locuzione si può ottenere riformulando l'enunciato $\mathfrak{A}_1$ così:

"*Siano X,Y,Z, … aperti dello spazio R.* $\sim\sim\varphi(X,Y,Z,\ldots) = R$".

Per questa via possiamo dire che l'espressione "$\mathfrak{A}_1$ *è soddisfatta in R*" ha lo stesso significato di "$\sim\sim\mathfrak{A}$ *soddisfa la matrice* $\mathsf{O}(R)$". Sulla base di queste convenzioni, in base alle 4.12, 4.11 e 4.24, si formulano i seguenti teoremi:

Primo teorema principale. *Siano R uno spazio topologico e* $\mathfrak{A}$ *un enunciato del calcolo degli enunciati. Le sequenti condizioni sono equivalenti:*

(i) $\mathfrak{A}$ *è dimostrabile nel calcolo binario*;
(ii) $\mathfrak{A}_1$ *è soddisfatta nello spazio R*;
(iii) $\mathfrak{A}_1$ *è valida in ogni spazio topologico.*

Secondo teorema principale. *Siano R un E-spazio e* $\mathfrak{A}$ *un enunciato del calcolo degli enunciati. Le sequenti condizioni sono equivalenti:*

[32] I concetti di validità e di soddisfacibilità di un enunciato appartengono alla cosiddetta semantica. Per il problema della loro esatta definizione cfr. il mio lavoro in Stud. Phil. 1, (1933), in particolare p. 307 sg. e p. 318 sg.

(i) $\mathfrak{A}$ *è dimostrabile nel calcolo intuizionista*;
(ii) $\mathfrak{A}_2$ *è soddisfatta nello spazio R*;
(iii) $\mathfrak{A}_2$ *è valida in ogni spazio topologico.*

I teoremi 4.8 e 4.14 si possono riformulare in modo analogo.
In riferimento al secondo teorema principale, vale la pena ricordare che agli *E*-spazi appartengono tutti gli spazi euclidei (cfr. 3.11).
Sulla scorta degli ultimi teoremi, i criteri di decisione, menzionati nel § 2 (cfr. 2.19), sono ora applicabili a enunciati topologici della forma $\mathfrak{A}_1$ o $\mathfrak{A}_2$ (e anche a classi più estese di enunciati topologici). In ogni caso particolare siamo ora in grado di decidere se un enunciato di tale forma è in generale valido in topologia.
Concludendo si noti che il calcolo degli enunciati si può interpretare in topologia in modi diversi. Nel caso del calcolo binario dalla 4.14 si ottiene un'interpretazione insiemistica banale, priva di particolare rilevanza topologica. Infatti, ogni insieme *R* può essere topologizzato come spazio isolato ponendo $\overline{X} = X$, per ogni $X \subset R$ (cfr. 3.6). Si ottiene un'interpretazione meno banale del calcolo binario procedendo nel seguente modo. Consideriamo i cosiddetti *campi aperti*[33] di uno spazio topologico *R*, cioè gli insiemi $X \subset R$ tali che

$$X = R - \overline{R - \overline{X}};$$

sia $\boldsymbol{O'}(R)$ il sistema di tali insiemi. Per gli insiemi $X, Y \in \boldsymbol{O'}(R)$ definiamo le operazioni $\rightarrow$, $\wedge$ e $\sim$ esattamente come in 4.1, ma poniamo

$X \vee' Y = R - \overline{R - \overline{X} - \overline{Y}}$ ($X \vee' Y$ è il più piccolo aperto regolare che contiene *X* e *Y*).

Si dimostra che la matrice $\mathsf{O}'(R) = [\boldsymbol{O'}(R), R, \rightarrow, \vee', \wedge, \sim]$ è adeguata al sistema $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$.[34]
Tenuto conto di questo, associamo all'enunciato

$\mathfrak{A}$ = "$\varphi(X,Y,Z, \ldots)$" l'enunciato

$\mathfrak{A}'_1$ = "$\varphi'(X,Y,Z, \ldots) = R$, *per X,Y,Z, ... campi aperti dello spazio R.*"

dove $\varphi'(X,Y,Z, \ldots)$ si ottiene da $\varphi(X,Y,Z, \ldots)$ sostituendo "$\vee'$" al posto di "$\vee$". Ne consegue che il primo teorema principale resta valido sostituendo "$\mathfrak{A}_1$" con "$\mathfrak{A}'_1$".

§ 5. INTERPRETAZIONE DEL CALCOLO DEGLI ENUNCIATI NELL'ALGEBRA BOOLEANA E IN TEORIE MATEMATICHE AFFINI.[35]

[33] [Nella terminologia attuale si parla di *insiemi regolarmente aperti,* tali che coincidono con l'apertura della loro chiusura. La definizione di Tarski è ridondante.]
[34] Ciò si ottiene facilmente dal teorema 7.23 della mia relazione in C. R. Soc. Sc. Vars, 30 (1937), p. 178 e nota 25, dove è dato un riferimento a un precedente lavoro di von Neumann. (Nota di Tarski alla traduzione inglese. Ciò è la conseguenza del fatto che la famiglia $\boldsymbol{O'}(R)$, insieme con le operazioni $\vee'$, $\wedge$ e $\sim$, soddisfa i postulati. dell'algebra booleana. Già nel 1927 lo notai e lo stabilii implicitamente nel teorema B dell'articolo *Foundations of solid geometry* (in A. Tarski, *Logic, Semantics*. *Metamathematics,* Clarendon Press, Oxford 1956, pp. 24-29), dove tuttavia utilizzai una differente terminologia. (Cfr. A. Tarski, *Foundations of Boolean Algebra*, in Id, cit. p. 341 nota 2).

L'*algebra booleana* (*generalizzata*) viene qui trattata come parte dell'algebra astratta, precisamente come teoria dei cosiddetti anelli booleani.

Definizione 5.1. *Si dice che un insieme R con almeno due elementi e due operazioni di base + e • è un* anello booleano *se, per* $x,y,z \in R$, *si ha:*

(i) $x+y,\ x \bullet y \in R$,

(ii) $x + y = y + x$,

(iii) $x + (y+z) = (x+y) + z$,

(iv) $x = y + (x+y)$,

(v) $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$,

(vi) $x \bullet (y+z) = x \bullet y + x \bullet z$.[36]

Osservazione 5.2.[37] Qui si vede che l'anello *R* nel senso dell'algebra astratta è booleano sse $x+y = x-y$, per $x,y \in R$. La condizione equivale a richedere l'idempotenza: $x \bullet x = x$, per $x \in R$. Ogni anello booleano è notoriamente commutativo.

Definizione 5.3. *Sia R un anello booleano.*

(i) *Si dice che x è* divisibile per *y*, *o che y è un* divisore *di x*, *in simboli* $x \subset y$,[38] *se* $x,y \in R$ *e se esiste uno* $z \in R$ *tale che* $x = y \bullet z$.

---

[35] Per il seguito cfr. i miei lavori in Fund. Math. 24 (1935), pp. 177 sg. (Fondamenti di algebra booleana, Il concetto di Atomo, Anelli completamente additivi), Fund. Math. 25 (1936), pp. 186 sg. (La teoria dei sistemi deduttivi, Il calcolo degli ideali), e i lavori riassuntivi di M.H. Stone in Trans. Am. Math. Soc. 40 (1936), pp. 37 sg. (Il rapporto tra algebra booleana e algebra generale astratta e la teoria dei campi di insiemi) e in Trans. Am. Math. Soc. 41 (1937), pp. 375 sg. (Il rapporto tra algebra booleana e topologia generale).

[36] [La traduzione inglese riporta la seguente, più consueta, assiomatizzazione:
(i) $x + y,\ x \bullet y \in R$,
(ii) $x + (y+z) = (x+y) + z$,
(iii) $x = y + (x + y)$
(iv) $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$
(v) $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$
(vi) $x \bullet y = y \bullet x$
(vii) $x \bullet x = x$
Un esempio di anello boleano è quello binario, a valori 0 e 1, con somma definita dalle posizioni: 1+1= 0, 1+0 = 0+1 = 0, 0+0 = 0 e moltiplicazione ordinaria.]

[37] [L'osservazione 5.2 della traduzione inglese fa notare che le formule (iii) e (vi) della propria assiomatizzazione possono essere sostituite dalle
(iii') $x = y+u = u+y$, *per un opportuno* $u \in R$;
(vi') $(y+z) \bullet x = y \bullet x + z \bullet x$.
Da cui si vede che ogni anello booleano è idempotente.]

[38] [La traduzione inglese propone la notazione specifica in tema di divisibilità: $y \mid x$. Manteniamo la notazione di Tarski, che è più generale.]

(ii) *Con* 0 *indichiamo l'elemento* $x \in R$ *divisibile per ogni elemento* $y \in R$.

I due simboli "$\subset$" e "0" si possono definire in diversi altri modi equivalenti.

Definizione 5.4. *Si dice che l'anello booleano R è* atomico*, rispettivamente* non atomico*, se, per ogni* $y \neq 0 \in R$*, esistono finiti, rispettivamente infiniti, elementi x divisibili per y.*

Osservazione 5.5. Si dicono *atomi* dell'anello booleano *R* gli elementi $y \in R$ tali che esistono esattamente due elementi $x \in R$ divisibili per *y,* precisamente $x = 0$ e $x = y$. Un anello è atomico sse ogni elemento $y \neq 0$ di *R* è rappresentabile come somma di un numero finito di atomi.[39] Si dice che *R* è senza atomi, quando in *R* non esistono atomi.

Definizione 5.6. *Sia R un anello booleano. Si dice che l'insieme non vuoto* $I \subset R$ *è un* ideale (*in R*), *in simboli* $I \in \boldsymbol{I}(R)$*, se*

(i) *per ogni coppia di elementi* $x,y \in I$, *loro somma* $(x + y) \in I;$
(ii) *per ogni elemento* $y \in I$, *se* $x \subset y$, *allora* $x \in I$.

Definizione 5.7. *Sia R un anello booleano. Per ogni* $I,J \in \boldsymbol{I}(R)$ *poniamo*:

(i) $I \rightarrow J = \sum\limits_{X \in \boldsymbol{I}(R),\ I \bullet X \subset J} X;$

(ii) $I \vee J = \prod\limits_{X \in \boldsymbol{I}(R),\ I + J \subset X} X;$

(iii) $I \wedge J = I \bullet J$ (*l'usuale intersezione insiemistica*);

(iv) $\sim I = I \rightarrow \{0\}$ $(= \sum\limits_{X \in \boldsymbol{I}(R),\ I \bullet X = \{0\}} X)$.

Dalle 5.1, 5.6 e 5.7 si ottiene facilmente il

Corollario 5.8. *Per ogni anello booleano valgono le proprietà:*

(i) $\{0\}, R \in \boldsymbol{I}(R)$, $\{0\}, R$ *sono rispettivamente il minimo e il massimo ideale in R*;
(ii) *se* $I,J \in \boldsymbol{I}(R)$, *allora anche* $I \rightarrow J$, $I \vee J$, $I \wedge J$, $\sim I$ *sono ideali in R. Precisamente* $I \rightarrow J$ *è il massimo ideale X, per cui* $I \bullet X \subset J$; $\sim I$ *è il massimo ideale per cui* $I \bullet X = \{0\}$; $I \vee J$ *è il minimo ideale che contiene I e J;* $I \wedge J$ *è il massimo ideale contenuto in I e J.*

Definizione 5.9. *Si indica con* $\mathsf{I}(R)$ *la sestupla ordinata* $[\boldsymbol{I}(R), R, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim]$, *dove R è un anello booleano.*

Il ben noto teorema seguente stabilisce in modo chiaro la stretta connessione formale tra algebra booleana e topologia.[35]

Teorema 5.10. *A ogni anello booleano R si può associare uno spazio topologico normale* $R^{\times}$ *tale che*

---

[39] Nel mio articolo in Fund. Math. 24 (1935) pp. 177 sg, ho usato la parola "atomico" in un senso più ampio.

(i) *esiste una funzione monotona non decrescente* F *che applica* $\boldsymbol{I}(R)$ *su* $\boldsymbol{O}(R^{\times})$ ($I \subset J$ *sse* $F(I) \subset F(J)$ *per* $I,J \in \boldsymbol{I}(R)$ *e in particolare* $F(\{0\}) = 0$ e $F(R) = R^{\times}$*);*

(ii) $R^{\times}$ *è isolato sse* R *è atomico;*

(iii) $R^{\times}$ *è denso in se sse* R *non ha atomi;*

(iv) $R^{\times}$ *è a base numerabile sse* R *è numerabile.*

Teorema 5.11. *Per ogni anello booleano* R, $\mathsf{I}(R)$ *è una matrice. Se* $R^{\times}$ *è lo spazio topologico associato a* R *secondo la* 5.10, *allora le matrici* $\mathsf{I}(R)$ *e* $\mathsf{O}(R^{\times})$ *sono isomorfe*.

Dimostrazione. Sulla base delle 4.2 e 5.8. si vede subito che la funzione F, che per il teorema precedente applica biunivocamente $\boldsymbol{I}(R)$ su $\boldsymbol{O}(R^{\times})$, soddisfa le seguenti formule: $F(I \rightarrow J) = F(I) \rightarrow F(J)$, $F(I \vee J) = F(I) \vee F(J)$, $F(I \wedge J) = F(I) \wedge F(J)$ e $F({\sim}I) = {\sim}F(I)$ per $I,J \in \boldsymbol{I}(R)$ (dove i segni "$\rightarrow$", "$\vee$" ecc. vanno letti in ogni formula a sinistra in senso algebrico booleano e a destra topologico). Se ne deduce facilmente, grazie alle 2.1, 2.3, 4.5, 4.6 e 5.9, che $\mathsf{I}(R)$ è una matrice, e precisamente una matrice isomorfa a $\mathsf{O}(R)$. CVD.

I due ultimi teoremi permettono di tradurre tutti i risultati del § 4 in termini di algebra booleana. Per ogni anello booleano R valgono i teoremi 5.12–5.15:

Teorema 5.12. $\mathfrak{IK} \subset \mathfrak{E}(\mathsf{I}(R)) \subset \mathfrak{ZK}$ (Per le 2.7, 4.8, 4.11, 5.11).

Teorema 5.13. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{ZK}$ *sse* ${\sim\sim}\mathfrak{A} \in \mathfrak{E}(\mathsf{I}(R))$, *per ogni enunciato* $\mathfrak{A}$. (Per le 2.7, 4.12, 5.11 o 1.6, 5.12).

Teorema 5.14. $\mathfrak{E}(\mathsf{I}(R)) = \mathfrak{ZK}$ *sse* R *è atomico.* (Per le 2.7, 4.14, 5.10 (ii), 5.11).

Teorema 5.15. $\mathfrak{E}(\mathsf{I}(R)) = \mathfrak{IK}$*, se* R *è numerabile senza atomi.* (Per le 2.7, 3.10, 4.24, 5.11 (iii), (iv), 5.11).

Osservazione 5.16. *Mutatis mutandis*, al teorema 5.15 si applica l'osservazione 4.25. Il teorema non si inverte. La formula $\mathfrak{E}(\mathsf{O}(R)) = \mathfrak{IK}$ vale, per esempio, per ogni anello booleano numerabile, non senza atomi, che contenga un sottoanello non atomico (cioè un sottoanello $R_1 \subset R$ con le stesse operazioni di R). D'altra parte si danno numerosi esempi di anelli booleani per i quali non vale né $\mathfrak{E}(\mathsf{I}(R)) = \mathfrak{ZK}$ né $\mathfrak{E}(\mathsf{I}(R)) = \mathfrak{IK}$. Alla classe di tali anelli appartengono in particolare tutti gli *anelli completamente additivi*,[40] cioè tali che

per ogni sottoinsieme $X \subset R$ *esiste il* massimo comun divisore *di tutti gli elementi* $x \in X$ (*cioè esiste un elemento* y *che è divisore comune di tutti gli* $x \in X$ *ed è divisibile da ogni altro divisore comune di tali elementi*).

La seguente proprietà è caratteristica degli anelli completamente additivi:

$${\sim}I \vee {\sim\sim}I = R, \textit{ per ogni } I \in \boldsymbol{I}(R).$$

In altri termini, se R è completamente additivo, allora il sistema $\mathfrak{E}(\mathsf{I}(R))$ contiene tutti gli enunciati $\mathfrak{A}$ della forma $\mathfrak{A} = {\sim}\mathfrak{B} \vee {\sim\sim}\mathfrak{B}$. Pertanto $\mathfrak{E}(\mathsf{I}(R)) \neq \mathfrak{IK}$ (cfr. 1.5). Ne

[40] [La terminologia di Tarski è *assolutamente additivo*.]

consegue, come è facile dimostrare, che nessun anello infinito completamente additivo è atomico. Da qui, per la 5.14, $\mathfrak{C}(\mathsf{I}(R)) \neq \mathfrak{Z}\mathfrak{K}$.

I teoremi 5.12 – 5.15 si possono presentare sotto forma dei due teoremi principali del § 4. In particolare, a ogni enunciato $\mathfrak{A}$ del calcolo degli enunciati si possono associare due enunciati $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$ dell'algebra booleana, tali che $\mathfrak{A}$ è dimostrabile nel calcolo binario, rispettivamente intuizionista, sse $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{A}_2$ valgono in ogni anello booleano. Si ottiene così il criterio di decisione per enunciati della forma $\mathfrak{A}_1$ o $\mathfrak{A}_2$.

Anche le osservazioni alla fine del § 4, concernenti un'altra possibile interpretazione del calcolo degli enunciati, sono applicabili all'algebra booleana. Basta sostituire gli aperti regolari [campi aperti] con gli ideali I che soddisfano la formula: $\sim\sim \mathsf{I} = \mathsf{I}$.

Chiaramente tutti questi risultati non valgono solo per il sistema formale dell'algebra booleana ma per ogni sua realizzazione. La più nota di queste è la teoria dei *campi di insiemi*,[41] cioè dei sistemi di insiemi chiusi rispetto alle operazioni di somma e sottrazione. Si dimostra facilmente che ogni campo di insiemi, contenente almeno due elementi, è un anello booleano con operazioni di base l'intersezione insiemistica e la differenza simmetrica: $X \Delta Y = (X-Y) + (Y-X)$. Gli esempi più semplici di anelli booleani speciali, di cui si fa menzione nelle 5.14–5.16, possono essere tratti proprio dalla teoria dei campi di insiemi. Per esempio, ogni campo di insiemi, consistente di tutti i sottoinsiemi finiti di un dato insieme (finito o infinito) è un esempio di anello atomico. Si ottiene un anello numerabile privo di atomi considerando l'insieme X dei razionali positivi $x \leq 1$ e formando il campo di insiemi delle somme di un numero finito di intervalli $\subset X$ (l'estremo destro appartiene sempre all'intervallo, il sinistro mai). Come esempio di anelli completamente additivi (nel senso della 5.16) possono servire i campi di insiemi costituiti da tutti i sottoinsiemi di un insieme dato.

Un'altra importante realizzazione dell'algebra di Boole è la *metamatematica generale,* cioè la *teoria dei sistemi deduttivi*.

Concludendo, molti dei risultati acquisiti si possono estendere a una teoria più generale, la teoria dei cosiddetti "reticoli" (*lattices*). Intervengono qui i cosiddetti *reticoli distributivi* con addizione infinita S e moltiplicazione finita. Ne sono esempi il sistema di aperti di uno spazio topologico e il sistema di ideali di un anello booleano.

Sia L un reticolo distributivo con almeno due elementi distinti. Si ponga

$$1 = \underset{z \in L}{S}\, z \qquad\qquad 0 = \underset{z \in 0}{S}\, z \text{ (0 – l'insieme vuoto)}$$

$$x \vee y = \underset{z \in \{x,y\}}{S}\, z \quad x \wedge y = x \bullet y \quad x \rightarrow y = \underset{(x \wedge z) \vee y = y}{S}\, z \quad \sim x = x \rightarrow 0$$

per $x,y \in L$. Risulta che $\mathsf{M}(L) = [L, 1, \rightarrow, \vee, \wedge, \sim]$ è una matrice e che, sostituendo "$\mathsf{I}(R)$" con "$\mathsf{M}(L)$", continuano a valere i teoremi 5.12 e 5.13. Si possono trasportare nella teoria dei reticoli anche i teoremi 5.14 e 5.15. Con ciò la teoria dei reticoli chiarisce al proprio interno i calcoli proposizionale binario e intuizionista.

[41] [Tarski parla di *corpi di insiemi.*]