PRIMA LEZIONE

LA FALLACIA LOGOCENTRICA

> Das Bestreben des menschlichen Geistes, alles im Zusammenhange zu erblicken, ist so groß, daß er bei der Erinnerung eines einigermaßen unzusammenhängenden Traumes die Mängel des Zusammenhanges unwillkürlich ergänzt. (*La tendenza a vedere tutto connesso è così forte che, ricordando un sogno in qualche modo sconnesso, lo spirito umano completa arbitrariamente tale mancanza di connessione*). Peter Willers Jessen, *Versuch einer wissenschaftliche Begrundüng der Psychologie*, Weit e Comp, Berlin 1855, p. 547, citato in S. Freud "Die Traumdeutung", in *Sigmund Freud Gesammelte Werke*, vol. II/III, cap. 1, Fischer, Frankfurt a.M. 1999, p. 49.

0. *Filosofia*

Concepito sin dai tempi di Eraclito come la legge stessa del mondo, il *logos* è il nucleo di ogni fondazione ontologica della metafisica. Per definizione, il *logos* è la sostanza e la causa del mondo. Importata in psicanalisi, la definizione suona: il *logos* è la sostanza e la causa della psiche.

Come *instrumentum ontologiae* il *logos* si è diffuso in Occidente attraverso il vangelo dell'Uno, o henologia, di cui le religioni monoteistiche sono le varianti più popolari. Il presupposto di ogni declinazione logocentrica è l'assioma di esistenza e unicità: se esiste, il *logos* è unico, nonché universale, cioè cattolico. Se fosse duplice sarebbe in conflitto con se stesso e non potrebbe governare il mondo. Se non fosse universale non servirebbe al potente di turno per sottomettere tutti alla propria legge. Perciò non si può combattere quella particolare versione del logocentrismo, rappresentata dallo spirito religioso, in qualunque versione concreta si presenti, senza decostruirne prima il principio di base: *In principio erat verbum* e il verbo era tutto.

Le cose non sono andate molto diversamente nel movimento psicanalitico. Lo psicanalista, che conosce la divisione soggettiva – la freudiana *Ichspaltung* – non avrebbe dovuto farsi sedurre da fantasmi dell'Uno, e dai suoi orpelli come sostanza e causa. Invece, la triste storia del movimento analitico è isomorfa alla storia delle religioni: un conflitto tra Uni. L'ultimo Lacan, il più filosofo degli psicanalisti, farfugliava: *y a d'l'Un.* A lui dobbiamo l'invasione del logocentrismo in psicanalisi, a cominciare dall'inconscio "strutturato come linguaggio" per finire con la tautologia del "significante che rappresenta il soggetto per un altro significante".[1] Come porvi rimedio? Usando le stesse armi del *logos*: la

[1] Motti chiaramente ispirati al logocentrismo heideggeriano: "Nel pensiero l'essere viene al linguaggio. Il linguaggio è la casa dell'essere". M. Heidegger, "Lettera sull''umanismo'" (1949), in Id., *Segnavia*, trad. F. Volpi, Adelphi, 1987, p. 267.

logica, ma meno filosofica e più matematica. In questa prima lezione do alcuni suggerimenti in proposito, analizzando il modello paradigmatico di logocentrismo, quello aristotelico-hegeliano, che sta al cuore delle maggiori sistemazioni filosofiche occidentali.

Dal *logos* alla logica il passo è breve. La logica ontologica del *logos*, proposta da Aristotele, nel suo *Organon*, e ripresa da Hegel, nella sua *Grande Logica*, si articola su tre leggi basilari (assiomi), apparentemente universali, valendo per esse la premessa: *per ogni ente X.* Sull'universalità di tale premessa ci sarebbe molto da ridire, essendo le classi troppo estese anche contraddittorie. Si veda, per esempio, l'insieme di Cantor di tutti gli insiemi: o non esiste o è contraddittorio. Ma il filosofo non tratta volentieri questioni di *res extensa*, ritenendole di pertinenza dello scienziato. E anch'io in questa prima parte ragionerò da filosofo, occupandomi di *res cogitans*, che in questo caso si direbbe meglio *res intensa*.

Formulo esplicitamente, allora, le tre leggi ontologiche del logocentrismo classico, concettuale e categorico, dell'Uno Tutto, così come è vividamente sintetizzato da Eraclito.[2] Perché il Tutto diventi Uno e l'Uno sia Tutto, occorrono tre leggi logiche ontologiche:

1. *legge di identità*: l'essere è e il non essere non è. In simboli,
(I): *per ogni ente X,* $X \rightarrow X$ (*se X, allora X*);

2. legge di non contraddizione l'essere non può essere e non essere al tempo stesso. In simboli,
(NC): *per ogni ente X,* $\sim(X \wedge \sim X)$ (*non è vero che X e non X*);

3. legge del terzo escluso: qualunque cosa o è o non è. In simboli,
(TE): *per ogni ente X,* $X \vee \sim X$ (*o è vero X o è vero non X*).

Tre in uno. Compri tre, paghi uno. È il dogma trinitario *ante litteram.* Classicamente, nel loro insieme queste tre leggi si riducono a una sola, perché nel calcolo logico bivalente si dimostrano equivalenti. Sono tre, ma una sola, che fonda la razionalità dell'essere identitario (I), non contraddittorio (NC) e categorico (TE). Il punto merita di essere fissato. La metafisica dell'Uno comincia dal (e purtroppo persiste nel) Due. Occorre il binarismo forte: l'essere è e il non essere non è, per promuovere l'Uno. Non si danno alternative al Due perché l'Uno sia. Non si danno terze vie o

[2] Cfr. M. Heidegger, *Logos*, alla pagina "Heidegger" nel sito, ma anche Paolo: "perché Dio sia tutto in tutti", I Corinzi, 15, 28. In Lacan il logocentrismo millenario rivela la propria verità diventando, come nota Derrida, *fallologocentrismo*. "Le phallus est le signifiant privilégié de cette marque où la part du logos se conjoint à l'avènement du désir." (J. Lacan, "La signification du phallus" (1958), in Id., *Ecrits*, Seuil, Paris 1966, p. 692). Politicamente parlando, l'Uno-Tutto è la definizione di nazismo. Si spiega così un certo svarione politico di Heidegger.

altre possibilità ontologiche, per esempio preontiche o postontiche. La metempsicosi, per esempio, è proscritta. La razionalità logocentrica sembra solidamente costituita in modo che non ammette alternative. Il particolare merito va a NC. Infatti, NC sembra autofondarsi perché, come fa osservare Aristotele, per dimostrare la contraddittorietà di NC, si deve usare ancora NC. Vedremo che le cose non stanno esattamente così e che Aristotele correva troppo.

Concretizzando la logica come scienza del luogo, facendola pertanto decadere dalla razionalità astratta dell'essere, la pratica topologica "riscopre" la fallacia dell'ontologia del *logos*.[3]

Come vedremo, si dimostra, infatti, che se valgono le tre leggi ontologiche suddette, in particolare la legge del terzo escluso, il *logos* viene meno al suo compito di stabilire connessioni tra le cose del mondo. Il progetto logocentrico di unificazione *logica* del mondo fallisce sul nascere, perché il *logos* non riesce a "mettere insieme" le cose. In quanto segue dimostro che, se esiste il *logos* identitario, non contraddittorio e categorico, proprio questo *logos* è incapace di istituire connessioni. In termini tecnici, se è ontologico, lo spazio del *logos* è sconnesso. Detto in termini filosofici, la razionalità del *logos* è sconnessa. Detto in termini psichiatrici, la razionalità del *logos* è schizofrenica.[4]

Devo alla corrispondenza con Adalinda Gasparini il suggerimento per sviluppare l'argomento che segue.

1. *Topologia: dentro, fuori e…*

Come premessa, dato la generale repulsione per la simbologia astratta, che sembra senza oggetto, raccomando di non cercare di capire tutto e subito di quanto segue. I simboli matematici non sono immediatamente

---

[3] La prima scoperta è merito di artisti, poeti, narratori, la cui pratica non mi sento di imitare, ma che per principio mi interdico di commentare, essendo il commento un retaggio religioso. È il presbitero che commenta il libro sacro.

[4] Heidegger, il massimo pensatore logocentrico contemporaneo, sembra conoscere il nostro argomento e mette le mani avanti a difesa del logocentrismo di sempre, a cominciare da quello più antico, l'eracliteo. "Nella misura in cui nel *Lógos* è possibile scorgere il modo in cui l'*Uno* dispiega il suo essere come l'unificante, si mostra al tempo stesso che questo unificare, che dispiega il suo essere nel *Lógos*, resta infinitamente diverso da ciò che si suole rappresentare come connettere e collegare (*Verknüpfen und Verbinden*). Questo unificare che consiste nel *léghein* [*del Lógos*] non è né un prendere tutto insieme, che abbraccia i contrari, né un loro accostamento per mera compensazione. L'*Uno-Tutto* [posto dal *Logos*] lascia riposare davanti-insieme in un esser presente le cose che sono separate l'una dall'altra, e perciò lontane l'una in confronto all'altra, come giorno e notte, inverno ed estate, pace e guerra". (M. Heidegger, *Logos* (*Heraklit fr. 50*) (1954), trad. F. Aronadio, Bibliopolis, Napoli 2004, p. 83, nei materiali del seminario). Nel mio linguaggio, avvedutamente Heidegger propone per il logocentrismo una topologia discreta, totalmente sconnessa. (Vedi *infra*).

trasparenti, come i simboli onirici o le metafore poetiche, ma lo diventano a poco a poco con l'uso.[5] L'uso li usura in supeficie, che diventa prima riflettente, poi trasparente. I simboli matematici risultano poco trasparenti all'umanista, perché sono il portato di una pratica, cui l'umanista non è aduso. I simboli matematici non sono simboli di essenze platoniche, ma dell'ignoranza di chi li usa. A differenza dell'umanista, che lavora con le essenze, il matematico lavora con l'ignoranza. (Quasi come l'analista non indottrinato). Per esempio, il matematico non sa cosa sia l'insieme. Ne ignora l'essenza concettuale, *quindi* inventa un simbolo che segnala la propria ignoranza.[6] Così mette l'insieme tra due parentesi graffe {}, e va avanti a lavorare, aspettando i risultati dell'opzione di scrittura adottata. Chi vivrà vedrà. In effetti, abbiamo visto la fioritura della teoria degli insiemi, da Boole, Frege e Cantor in poi, e oggi ne sfruttiamo i risultati. Insomma, vale la raccomandazione: capire subito, senza l'intermediazione del tempo epistemico per comprendere, è una fallacia ancora più temibile di quella logocentrica, perché paralizza la comprensione successiva.

Per i simboli ricorrenti in questo seminario vale la seguente tabella di traduzione:

- $=$ uguale
- $=_{df}$ uguale per definizione
- $\neq$ diverso
- $\sim$ negazione
- $\wedge$ *et*
- $\vee$ *vel*
- $\rightarrow$ condizionale (se… allora)
- $\leftrightarrow$ bicondizionale (se e solo se)
- $\forall$ per ogni
- $\exists$ esiste almeno un
- . tale che logico (dopo $\forall$, $\exists$)
- {} insieme

[5] Sto implicitamente affermando che la matematica, prima che una teoria, è una pratica. Bisogna fare esercizi per assimilarla. Non basta andare a lezione. Richiede un'attività. Non basta recepirla passivamente *ex cathedra*. Tanto più che in matematica non vale il principio di autorità. Fondamentamentalmente le scuole di matematica sono senza maestri. Si va lì per fare esercizio matematico con qualcuno più esperto di noi. La frequenza dura finché si è appresa una pratica.

[6] I simboli della teoria degli insiemi, così come li conosciamo, hanno una duplice origine: dalla teoria dei numeri, che studia le proprietà dei numeri (per esempio le condizioni della fattorizzazione unica diegli interi razionali o algebrici), e dalla topologia, che studia le proprietà dell'estensione, nel senso cartesiano del termine. Dietro a entrambe queste branche della matematica si erge minacciosa l'ombra dell'algebra. I simboli matematici sono fondamentalmente algebrici, in quanto sono simboli scritti, e la scrittura è il corpo severo dell'algebra.

- $|$ tale che insiemistico
- $\in$ appartenenza a un insieme
- $\notin$ non appartenenza a un insieme
- $\subset$ inclusione di un insieme in un altro
- $\cup$ unione di insiemi
- $\cap$ intersezione di insiemi
- **C** complemento di un insieme
- **P**(A) insieme potenza di A o insieme dei sottoinsiemi di A
- $\perp$ incorpora
- – differenza di insiemi
- $\varnothing$ insieme vuoto
- ∂ frontiera di un insieme
- β bordo di un insieme
- (,) coppia ordinata
- ° apertura
- $\overline{\text{chiusura}}$
- ecc.

Raccomando di considerare questi simboli come stenografie di cui impratichirsi con l’uso. Per esempio, l’unione dei due insiemi A e B si scrive $A \cup B$. Il nuovo insieme C così costruito – costruito scrivendo – è l’insieme formato dagli elementi che appartengono ad A *o* a B. Analogamente, l’intersezione dei due insiemi A e B si scrive $A \cap B$. Il nuovo insieme C così costruito – costruito scrivendo – è l’insieme formato dagli elementi che appartengono ad A *e* a B. Mi fermo qui con le esemplificazioni. Quel che serve lo capiremo man mano con l’uso. Le cose vanno come al bambino che impara a leggere. Prima riconosce la “a” come *a*, la “b” come *b*, e poi legge *ba* dove trova la successione delle lettere “ba”. Diceva Gesù: “Se non diventerete come bambini…” e avrebbe dovuto aggiungere: “non imparerete mai a leggere e a scrivere”. Se non diventerete come bambini, i simboli matematici vi manderanno in psicosi, foucaultianamente intesa come assenza d’opera, o, come preferisco dire, vi faranno regredire all’inibizione originale. D’altronde, per la pratica di scrittura non basta l’intelligenza, per fortuna. Imparano a leggere e a scrivere anche gli stupidi. Basta fare esercizio. Si impara correggendo gli errori di ortografia. Immaginate, allora, di tornare bambini e di utilizzare un alfabeto segreto per comunicare con gli amici. Fuor di metafora, non posso dirvi tutto prima. Un po’ dovete sapere già qualcosa (per esempio, dovete sapere cos’è l’unione di due insiemi), un po’ dovete tirare a indovinare e po’ dovete sperare di avere indovinato. Se avete sbagliato, vi correggete. La matematica non ha maestri, ma correttori.

La definizione di *spazio topologico* che propongo è il caso particolare di una definizione sufficientemente generale (ma non la più generale) di *spazio R* (*R* da *Raum* in tedesco).[7] Il quale presuppone la definizione di *famiglia caratteristica F* (*F* da *Familie* in tedesco). A sua volta, la nozione di famiglia caratteristica presuppone la definizione di *ricoprimento* (o *rivestimento* o *copertura*), che ci tornerà utile per parlare di corpo nella prossima lezione, convocando gli insiemi compatti.

Def. –2. [Ricoprimento] *Si dice che un insieme di insiemi F è un* ricoprimento *di R* (*o F* ricopre *R*) *se, per ogni elemento* $x \in R$*, esiste un insieme di* $X \in F$*, tale che* $x \in X$*. In simboli* $\forall x(x \in R)\exists X(X \in F).\ x \in X$.

Oss. L'unione di tutti gli elementi di F contiene R. $R \subset \bigcup_{X \in F} X$.

Oss. È facile costruire un ricoprimento di R. Basta considerare l'insieme A che include R ($R \subset A$) e porre $F = \mathbf{P}(A)$.

Def. –1. [Famiglia caratteristica] *Si dice che* F_R *è una famiglia caratteristica di R, se F è un ricoprimento di R e* $R = \bigcup_{X \in F} X$.

Oss. La famiglia caratteristica è un ricoprimento esatto.

Def. 0. [Spazio] *Si dice che* ρ *è uno* spazio *se* $\rho = (R, F_R)$. (R, F_R) *è la coppia ordinata formata da* $R \neq \emptyset$, *l'*insieme sostegno *dello spazio, e da* F_R, *la* famiglia caratteristica *di R*.

Oss. Questa definizione esclude gli spazi vuoti.

Oss. Definire una struttura – algebrica o geometrica – sull'insieme A mediante la coppia (A, B), dove B è un insieme di operatori o morfismi, che agisce sull'insieme A, è caratteristico dell'approccio algebrico inaugurato da Felix Klein nel suo programma di Erlangen (1872), riportato nel sito www.sciacchitano.it alla pagina "Felix Klein". Il significato intuitivo di questo modo di procedere è l'introduzione nell'insieme sostegno A di certe simmetrie, riportate nell'insieme B. *Uno spazio è un insieme dotato di simmetrie* (non necessariamente metriche, cioè quantitative).

[7] Qui probabilmente molti di voi di formazione umanistica incapperanno nella prima difficoltà. Che bisogno c'è di definire *lo* spazio? Lo spazio è uno solo, quello lì fuori dalla finestra. Semmai bisogna studiare quel che succede *nello* spazio, le varie figure che si presentano. Ebbene, no. La matematica moderna studia *gli* spazi, al plurale. Quel che accade "dentro" allo spazio è poco rilevante e serve solo a differenziare uno spazio dall'altro. L'idea dello spazio unico è un vecchio arnese euclideo, l'ennesima versione dell'ontologia logocentrica, consolidata come buon senso dalla filosofia kantiana.

Per semplificare la scrittura, in seguito ometto il pedice *R*, sottointendendo che la famiglia caratteristica sia sempre caratteristica dell'insieme sostegno, e uso l'apice per individuare famiglie diverse, per esempio di aperti (α) o chiusi (κ), all'interno dello stesso insieme sostegno.

Def. 1. [Spazio topologico] *Si dice che* τ *è uno* spazio topologico *se* $\tau = (R, F^{\alpha})$. (R, F^{α}) *è la coppia ordinata formata da R*, *l'insieme sostegno dello spazio, e da* F^{α}, *la famiglia dei sottoinsiemi* $X \subset R$, *detti* aperti *di* τ, *tali che*

(i) *l'unione di aperti è aperta. In simboli,* $X, Y, Z ... \in F^{\alpha} \rightarrow X \cup Y \cup Z \cup ... \in F^{\alpha}$;

(ii) *l'intersezione* finita *di aperti è aperta. In simboli,* $X, Y \in F^{\alpha} \rightarrow X \cap Y \in F^{\alpha}$.

Gli elementi di uno spazio topologico *R* si chiamano anche "punti" di *R*, in memoria dell'origine geometrica della topologia.

Intuitivamente, l'aperto è un insieme di punti "vicini" a un proprio punto. Più l'aperto è "piccolo" più i suoi punti sono "vicini" tra loro. La nozione di aperto è qualitativa. Non è metrica, ma può essere resa metrica. (Cosa che non faremo in questo seminario).

Oss. L'intero spazio *R* e l'insieme vuoto $\varnothing$ sono aperti. In simboli, $\varnothing, R \in F^{\alpha}$. Ciò consegue al fatto che *R* è il risultato dell'intersezione vuota. (Si può pensare che ogni intersezione sia scritta a cominciare da *R*). Analogamente $\varnothing$ è il risultato dell'unione vuota. (Si può pensare che ogni unione sia scritta a partire dall'insieme vuoto).

Si dice *banale* (o indiscreta) la topologia tale che $F^{\alpha} = \{R, \varnothing\}$.

Si dice *discreta* la topologia tale che $F^{\alpha} = \{X \mid X \subset R\}$, cioè la topologia in cui ogni sottoinsieme $X \subset R$ è aperto. In un certo, senso le topologie indiscreta e discreta sono entrambe topologie banali, in quanto non introducono condizioni limitanti all'insiemistica.

[Domanda per chi comincia a smanettare con la propria ignoranza e ci prova gusto. Perché il topologo si cautela nei confronti dell'intersezione infinita, censurandola dal proprio discorso?]

Def. 1'. [Sottospazio topologico] *Dato lo spazio topologico* $\tau = (R, F^{\alpha})$, *si dice che la coppia* $\tau_Y = (R, F_Y^{\alpha})$ *è un sottospazio topologico di R se Y è un sottoinsieme di R* ($Y \subset R$) *e gli aperti X di Y sono le intersezioni di Y con gli aperti di R. In formule*, $F_Y^{\alpha} = \{X \mid X = Y \cap Z \wedge Z \in F^{\alpha}\}$.

Oss. Si dice anche che *Y eredita* la topologia di *R*. Si chiamano *ereditarie* le proprietà di uno spazio che valgono anche nei suoi sottospazi, Def. 2. [Intorno] *Si dice che l'insieme* U_x, *che contenga un aperto* $A \in F^\alpha$ *che contiene* x, *è un* intorno *di* x. *In simboli,* $x \in A \subset U_x$.

Ovviamente $x \in U_x$. Per definizione la topologia non lascia alcun punto "scoperto". Ogni punto di R è coperto da almeno un aperto, in ogni caso da R. A partire dalla definizione si può pensare alla topologia come a un ricoprimento dell'insieme sostegno. Ricoprono l'insieme sostegno tanti foglietti. Sono gli aperti. Ma sono foglietti trasparenti e godono di una proprietà particolare che li rende dinamici. Ah, la psicodinamica! Se riunisci tanti foglietti, il loro insieme si fonde in un foglietto trasparente. La parte comune di due foglietti è ancora un foglietto trasparente, ma la parte comune di infiniti foglietti potrebbe non essere trasparente (o avere un diverso indice di rifrazione).

All'analista questo modello – Benjamin lo chiamerebbe "allegoria" – dei foglietti trasparenti può ricordare la costruzione freudiana dell'apparato psichico. Tanti foglietti corrispondono a tanti strati psichici, disposti in serie dal versante sensoriale a quello motorio del sistema nervoso (cfr. il modello del VII cap. dell'*Interpretazione dei sogni* di Freud). Come se fosse un raggio luminoso, il punto luminoso x – Lacan direbbe il significante, Freud l'impulso nervoso – attraversa più foglietti trasparenti sovrapposti. Se il percorso è rettilineo, si ha la concatenazione metonimica (*Verschiebung*). Se in un certo foglietto cambia l'indice di rifrazione, si produce la deviazione del raggio e si produce la sostituzione metaforica (*Verdichtung*), con passaggio del punto x da una serie di foglietti a un'altra.

La topologia, o discorso degli spazi topologici, è naturalmente intuizionista in senso tecnico. Il termine "intuizionista" (che c'entra poco con l'intuizione dell'immaginazione) significa che non si ammette TE come assioma della teoria, nel caso come assioma topologico. Infatti, dati un insieme $X \subset R$ e un elemento $x \in R$, si danno tre casi:

(i) x è interno a X;

(ii) x è interno a $\mathbf{C}X$. Ricordo che il complemento di X è l'insieme di punti che non appartengono a X. In simboli, $\mathbf{C}X = \{x \mid x \notin X\}$;

(iii) x non è interno né a X né a $\mathbf{C}X$.

Nel caso (ii) si dice che x è *esterno* a X. Nel caso (iii) si dice che x è di *frontiera* per X.

L'intuizionismo è logicamente molto vicino al freudismo. La sospensione del terzo escluso è un principio naturalmente freudiano. Infatti, la negazione freudiana non sempre nega, avendo talvolta la funzione di portare alla coscienza il rimosso (cfr. *Die Verneinung*, 1925). Ma se $\neg A$ talvolta è A, allora $A \vee \neg A$, talvolta è $A \vee A$, cioè A. In tal caso il principio del terzo escluso non è una tesi universalmente valida all'interno del freudismo. In *Una matematica per la psicanalisi. L'intuizionismo di Brouwer da Cartesio a Lacan* (in *Matematica e cultura 2006*, a cura di M. Emmer, Springer Italia, Milano 2006, pp. 61-69), che trovi nel sito www.sciacchitano.it alla pagina "sapere del tempo", ho sviluppato gli aspetti logici, precisamente di logica epistemica, della vicinanza tra freudismo e intuizionismo. Qui tratto gli aspetti topologici del freud-brouwerismo che, come vedremo, in ultima analisi si riducono agli effetti della convocazione dell'infinito attuale nella teoria del soggetto.

A questo punto non resta che definire il punto *interno*.

Def. 3. [Interno] *Si dice che l'elemento* $x \in R$ *è* interno *all'insieme* $X \subset R$ *se esiste un aperto* $A \in F^{\alpha}$ *che contiene x ed è contenuto in X. In simboli,* $\exists(A \in F^{\alpha}).((x \in A) \wedge A \subset X)$.

Si può anche dire che x è interno a X se X è un intorno di x. (interno → intorno). Intuitivamente i punti interni dell'insieme X sono caratterizzati dal fatto di essere "abbastanza dentro" a X da non interferire né con la frontiera di X né a maggior ragione con il complemento di X.

A partire dai punti interni si possono caratterizzare gli aperti. Infatti, vale il teorema:

T. 0. *Un insieme X è aperto sse è intorno di ogni suo elemento* (*ossia sse ogni suo elemento è interno*). *In simboli,* $\forall(x \in X)\exists U_x.U_x \subset X$.

[Ovvio.]

Duale è la definizione di punto *esterno*.

Def. 3'. [Esterno] *Si dice che l'elemento* $x \in R$ *è* esterno *all'insieme* $X \subset R$, *se è interno al complemento* $\mathbf{C}X$ *di X. In simboli,* $\exists(A \in F^{\alpha}).((x \in A) \wedge A \subset \mathbf{C}X)$.

Def. 3". [Punto di frontiera] *Si dice che l'elemento* $x \in R$ *è* punto di frontiera *per l'insieme* $X \subset R$, *se appartiene a X o a* $\mathbf{C}X$ *e non è né interno a X né interno al complemento* $\mathbf{C}X$ *di X. In simboli,* $((A \in F^{\alpha}) \wedge x \in A) \rightarrow (A \cap X \neq \varnothing \wedge A \cap \mathbf{C}X \neq \varnothing)$, *cioè ogni aperto A che contiene x interseca sia X sia* $\mathbf{C}X$.

Intuitivamente, un punto di frontiera dell'insieme X è caratterizzato dal fatto che ogni suo intorno contiene sia elementi di X sia elementi dell'insieme complementare $\mathbf{C}X$.

[La tricotomia *interno, esterno e frontiera* suggerisce una considerazione teorica che in prima lettura si può saltare, ma che ha un certo interesse per delucidare la nozione psicanalitica di incorporazione (vedi Lezione seconda).

In effetti, la tricotomia topologica offre uno spunto interessante per differenziare tra due nozioni che vengono spesso confuse: l'appartenenza e l'inclusione. Appartenenza e inclusione non sono nozioni equivalenti. In topologia l'inclusione, intesa come "essere interno", è una nozione più forte dell'appartenenza. Infatti, se un punto x è interno all'insieme X, allora sicuramente appartiene all'insieme X; ma x può appartenere a X senza essere interno ad X, per esempio, se x è punto di frontiera di X ($x \in \partial X$). Tuttavia, in senso insiemistico generale, il discorso si capovolge (questo è irritante!) e l'appartenenza risulta essere una nozione più forte dell'inclusione. Se x appartiene a X ($x \in X$), allora l'insieme costituito da x, cioè il singoletto $\{x\}$, è incluso in x ($\{x\} \subset X$). Ma non vale il viceversa. Infatti, se x è una classe propria, cioè non appartiene a nessuna classe, allora può essere inclusa in X, nel senso che i suoi elementi appartengono a X, ma per definizione non può appartenere a X. La matematica moderna è orientata a teorie, come quella delle categorie, non insiemistiche. Sono teorie senza appartenenza ma con inclusione. Trattano gli insiemi dall'esterno attraverso le applicazioni che trasformano un insieme in un altro, ma senza entrare al loro interno, prcisando quali elementi appartengono all'insieme e quali no. Queste sottigliezze dovrebbero essere presenti alla mente dell'analista quando parla di identificazione (= appartenenza) e incorporazione (= inclusione).

Colloquialmente è giustificato confondere le due nozioni. In quanto segue parlo di X che contiene x per intendere $x \in X$.]

I punti di frontiera sono un caso particolare di *punti limite* (o *punti di accumulazione* o *punti derivati*, in tedesco *Häufungspunkte*).

Def. 4. [Punto limite] *Si dice che un elemento $x \in R$ è un* punto limite *per $X \subset R$ se ogni intorno di x contiene almeno un elemento y di X diverso da x. In simboli,* $\forall U_x \exists y (y \in X \wedge y \neq x)$ oppure $\forall U_x : U_x \cap (X - \{x\}) \neq \emptyset$.

Oss. Intuitivamente, la nozione di "punto limite" significa "che ci si può avvicinare quanto si vuole senza necessariamente arrivare a toccare". Il vero scopritore dei punti limite fu l'inventore del paradosso di Achille e la tartaruga, l'eleatico Zenone. Il riscopritore è Freud. Nell'Edipo la madre è un punto limite per il bambino.

La nozione duale di punto limite è quella di *punto isolato*, per il quale esiste un intorno che coincide con se stesso.

Def. 4'. [Punto isolato] *Si dice che un elemento* $x \in R$ *è un* punto isolato di $X \subset R$, *se esiste un intorno* U_x *di* x *la cui intersezione con* X *sia* $\{x\}$. In formule, $\exists U_x : U_x \cap (X - \{x\}) = \emptyset$.

Oss. L'esempio più semplice che differenzia tra punto limite e punto isolato è lo spazio topologico dell'inclusione, dotato di un insieme sostegno di due soli punti. Sia dato l'insieme $\{a, b\}$ con la famiglia caratteristica di aperti $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. b è punto limite dell'insieme $\{a\}$, in quanto ogni aperto, che contiene b, contiene un punto dell'insieme $\{a\}$ diverso da b, precisamente a. Inoltre, a è un punto isolato dello spazio topologico, perché $\{a\}$ è aperto.

Esiste una nozione più forte di *punto limite* ed è quella di *limite*, che conviene ricordare e tenere ben distinta da quella di punto limite. (Perciò si preferisce parlare di punti di accumulazione invece che di punti limite). Per poter parlare di limite, tuttavia, occorre presupporre una struttura più forte di quella di insieme. Infatti, si parla di limite di una successione o di un filtro (o di un ultrafiltro).

Mi limito al caso della successione. Una successione è un insieme finito o infinito numerabile di punti, ordinati da un indice, di solito un intero.[8] In simboli, $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ o, in forma compatta, $\{x_i\}_{i \in \mathrm{N}}$.

Def. 4" [Limite] *Si dice che* l *è il* limite *della successione* $\{x_i\}_{i \in \mathrm{N}}$ (*o, impropriamente, che* x_i tende al limite l) *se ogni intorno* U_l *di* l *contiene tutti i punti della successione, tranne al più un numero finito*.

Detto in modo più difficile, per ogni intorno U_l di l esiste un intero k_0 tale che per ogni $k > k_0$ si ha $x_k \in U_l$.

Ovviamente ogni punto limite è limite, ma non viceversa.

Esempi concreti di punti limite?

[8] Più in generale (vedi lezione seconda) una successione è un'applicazione dell'insieme **N** degli interi su un insieme X. La teoria dei limiti, inaugurata da Cauchy e approfondita da Weierstrass nel secolo XIX, ha reso per la prima volta rigoroso il concetto di *applicazione continua*. Si dice che un'applicazione $f: X \to Y$ è continua nel punto x_0 di X se, per ogni successione degli argomenti $\{x_i\}$ che tenda a x_0 in X, la corrispondente successione dei valori della applicazione in Y $\{y_i = f(x_i)\}$ tende a un limite y_0, che coincide con il valore dell'applicazione in x_0, ossia $y_0 = f(x_0)$. Con la teoria dei limiti l'analisi si aritmetizza e si affranca dalla nozione euclidea di quantità, che usa la nozione di continuità in modo implicito attraverso i sottomultipli dell'unità di misura. Il concetto da ritenere è che la matematica moderna tende a diventare sempre meno quantitativa e sempre più qualitativa.

Ogni punto x di R, se non è isolato, è un punto limite di $\mathbf{C}\{x\}$. Come è facile verificare, x non appartiene a $\mathbf{C}\{x\}$ ($x \notin \mathbf{C}\{x\}$ per definizione), ma ogni intorno U_x di x contiene punti di $\mathbf{C}\{x\}$. Infatti, se non li contenesse, x sarebbe un punto isolato, contro l'ipotesi.

Da quanto precede, due osservazioni.

Primo, un punto limite per X non appartiene necessariamente a X, come si vede nel caso appena discusso e nel caso dei punti frontiera, che possono sia appartenere all'insieme (nel caso l'insieme sia chiuso) sia non appartenere (nel caso l'insieme sia aperto).

Secondo, i punti di frontiera sono sempre punti limite, ma non vale il viceversa: non sempre un punto limite è di frontiera. Esistono, cioè, punti limite interni a un insieme (Questo è sempre vero nel caso che X sia aperto). Ovviamente non esistono punti limite per X esterni a X.

I punti limite per l'insieme X formano il *derivato* di X, che si indica con $D(X)$. In simboli, $D(X) =\{x \mid \forall U_x : U_x \cap (X - \{x\}) \neq \varnothing\}$.

Una generalizzazione dei punti limite sono i *punti fallici* (o punti di ω-accumulazione), che userò nella seconda lezione.

Def 5. [Punto fallico] *Si dice che un elemento $x \in R$ è un* punto fallico *per $X \subset R$ se ogni intorno di x contiene un'infinità numerabile di elementi di R.*

A partire dai punti limite si possono caratterizzare gli insiemi chiusi e l'operazione di chiusura topologica. Gli insiemi chiusi sono così definiti:

Def. 5. [Chiuso] *Si dice che l'insieme $C \subset R$ è* chiuso *se esiste un aperto $A \in F^\alpha$ tale che C sia il suo complementare. In simboli, $\exists A.C = \mathbf{C}A$.*

In altri termini, i chiusi sono i complemetari degli aperti e gli aperti i complementari dei chiusi. In seguito indico la famiglia dei chiusi con F^κ. Attraverso i chiusi di F^κ si può definire lo spazio topologico con una versione duale della Def. 1, ma ad essa equivalente.

Def. 1' [Spazio topologico]. *Si dice che* τ *è uno* spazio topologico *se* $\tau = (R,F^\kappa)$. (R, F^κ) *è la coppia ordinata formata da R, l'*insieme sostegno *dello spazio, e da F^κ, la famiglia* dei *sottoinsiemi $X \subset R$, detti* chiusi *di* τ, *tali che*

(i) *l'unione* finita *di chiusi è chiusa. In simboli, $X,Y \in F^\kappa \rightarrow X \cup Y \in F^\kappa$*;

(ii) *l'intersezione di chiusi è chiusa. In simboli, $X,Y,Z... \in F^\kappa \rightarrow X \cap Y \cap Z \cap ... \in F^\kappa$*;

Def. 1 e Def. 1' definiscono la stessa topologia su R. In simboli, $\rho \equiv \tau$. È indifferente definire la topologia tramite aperti o chiusi, essendo gli uni determinati univocamente dagli altri.

Il seguente teorema caratterizza i chiusi in termini di punti limite.

T. 1. *L'insieme $X \subset R$ è chiuso sse contiene i propri punti limite. In simboli, $X \in F^{\kappa} \leftrightarrow D(X) \subset X$.*

[Per definizione $\overline{A} = A \cup D(A)$. Se $D(A) \subset A$, allora $A = A \cup D(A)$, quindi $A = \overline{A}$.]

Dato un insieme $X \subset R$, è possibile associargli due insiemi, duali l'uno dell'altro: l'*apertura* (o l'*interiore*) di *X,* e la *chiusura* di *X.*

Def. 6. [Apertura] *Si dice* apertura (*o* interiore) *di A, e si indica con $A°$, l'unione degli aperti ($X \in F^{\alpha}$) contenuti in A ($X \subset A$). In simboli, $A° = \bigcup_{X \in F^{\alpha},\, X \subset A} X$.*

L'espressione ($X \in F^{\alpha}$, ($X \subset A$), posta sotto il segno di unione indica la doppia condizione che gli insiemi X devono soddisfare per entrare a far parte dell'unione: essere aperto ($X \in F^{\alpha}$) ed essere contenuto in A ($X \subset A$).

Def. 6' [Chiusura]. *Si dice* chiusura *di A, e si indica con $\overline{A}$, l'intersezione dei chiusi ($X \in F^{\kappa}$) che contengono A ($A \subset X$). In simboli, $\overline{A} = \bigcap_{X \in F^{\kappa},\, A \subset X} X$.*

L'espressione ($X \in F^{\kappa}$, $A \subset X$) posta sotto il segno di intersezione indica la doppia condizione che gli insiemi X devono soddisfare per entrare a far parte dell'intersezione: essere un chiuso ($X \in F^{\kappa}$) e contenere A ($A \subset X$).

Segnalo una difficoltà di lettura da parte vostra (e di scrittura da parte mia) dovuta al fatto che la soprasegnatura, e a maggior ragione la circolettatura, sono notazioni infelici. Infatti, sono scritture elastiche: se la formula è corta, la soprasegnatura è corta, se è lunga, lunga, come si vedrà in seguito (cfr. la definizione di condizionale). La ragione per cui uso la soprasegnatura è di mantenere l'uniformità di scrittura con il lavoro di Tarski su topologia e calcolo proposizionale, allegato nel sito www.sciacchitano.it alla pagina "sapere del tempo". Ricordo che, usando la soprasegnatura per indicare la negazione senza rispettarne la convenzione, Lacan sbagliò l'ortografia delle sue formule della sessuazione. L'errore fu impietosamente ma giustamente messo alla berlina da Alan Sokal nel suo *Imposture intellettuali.*

Ovviamente, l'apertura è aperta e la chiusura è chiusa. Si ha $X° \subset X \subset \overline{X}$.

Abbiamo già visto due modi equivalenti di definire uno spazio topologico attraverso la famiglia degli aperti e la famiglia dei chiusi. Un modo alternativo e più "operativo" (ossia più algebrico) è attraverso l'operatore di chiusura (o apertura), il quale a ogni insieme A dello spazio associa la propria chiusura $\overline{A}$ (o apertura $A°$). Nel 1922 Kuratoswski usò questo modo attraverso gli assiomi di chiusura che portano il suo nome:

[Estensività] $A \subset \overline{A}$.
[Isotonia] $B \subset A \rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$ (originariamente $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$).

[Idempotenza] $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
[Invarianza del vuoto] $\overline{\varnothing} = \varnothing$,
dove A e B denotano sottoinsiemi qualunque dello spazio R.

Può essere utile a esercitarsi a derivare gli assiomi di Kuratowski da quelli degli aperti.

Def. 7. [Frontiera] *Si dice* frontiera *di X la differenza tra* $\overline{X}$ e $X°$ *e si indica con ∂X. In simboli, $\partial X = \overline{X} - X°$.*

Ovviamente la frontiera è formata da tutti gli elementi che appartengono alla chiusura ma non all'apertura, cioè dagli elementi di frontiera. La frontiera è caratterizzata dai teoremi:

T. 2. $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbf{C}X}$.
T. 2'. *Per ogni $X \subset R$ la frontiera ∂X di X è chiusa. In simboli,* $\forall X. \partial X \in F^{\kappa}$.
[$\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbf{C}X}$. L'intersezione di due chiusi è chiusa.]

Oss. La frontiera di un insieme X realizza una tripartizione dello spazio in tre insiemi disgiunti (relazione di equivalenza soggettiva): l'interno di X ($X°$), l'esterno di X (($\mathbf{C}X$)°) e la frontiera di X (∂X).

Cor. La frontiera della frontiera è una frontiera.
Oss. L'operatore frontiera è idempotente. Applicato a se stesso dà se stesso. Si comporta come l'operatore epistemico del sapere inconscio, per cui sapere di sapere è sapere. Infatti, entrambi gli operatori fanno giocare la sospensione del principio del terzo escluso.[9]

I seguenti teoremi caratterizzano la differenza tra aperti e chiusi in termini di frontiera.

[9] Cfr. A. Sciacchitano, *Una matematica per la psicanalisi. L'intuizionismo di Brouwer da Cartesio a Lacan*, in *Matematica e cultura 2006*, a cura di Michele Emmer, Springer Italia, Milano 2006, pp. 61-69. Si trova alla pagina "sapere del tempo" del sito.

T. 4. *Un insieme* $X \subset R$ *è chiuso sse contiene la propria frontiera. In simboli,* $X \in F^{\kappa} \leftrightarrow \partial X \subset X$.
[Dimostrazione per i più bravini.]

T. 5. *Un insieme* $X \subset R$ *è aperto sse è disgiunto dalla propria frontiera. In simboli,* $X \in F^{\alpha} \leftrightarrow X \cap \partial X = \varnothing$.
[Dimostrazione per i più bravini]

Def. 8. [Clopen] *Si dice che l'insieme X è* clopen (closed *e* open) *sse la sua frontiera è vuota. In simboli,* $\partial X = \varnothing$.

Per completare l'argomento antilogocentrico occorre definire lo spazio connesso.

Def. 9. [Spazio connesso] *Si dice che lo spazio topologico R è* connesso *se non è l'unione di due aperti (chiusi) non vuoti e disgiunti. In simboli,* $\forall (X, Y \in F^{\alpha}).((X \cup Y = R) \rightarrow (X \cap Y \neq \varnothing))$.

Gli spazi connessi sono caratterizzati dal teorema:

T. 6. *Lo spazio topologico R è connesso sse gli unici* clopen *sono R e* $\varnothing$.
[Dimostrazione per i più bravi.]

La connessione si può definire in termini di (non) separazione.

Def. 10. [Separazione topologica] *Si dice che due insiemi U e V sono* topologicamente separati *se* $\bar{U} \cap V = U \cap \bar{V} = \varnothing$.

La definizione 10 indebolisce la definizione di Sierpinski.
Def. 10'. *Si dice che due insiemi U e V sono* separati *se* $U \cap V = \bar{U} \cap V = U \cap \bar{V} = \varnothing$.
Sierpinski fa notare che si può definire una topologia in termini di separazione.

Oss. L'insieme vuoto è separato da ogni altro insieme – anche da se stesso –, pur essendo incluso in ogni insieme.

T. 7. *Un insieme è* connesso *sse non è unione di due insiemi topologicamente separati e disgiunti.*
[Dimostrazione per esercizio]

Oss. Alternativamente un insieme si definisce connesso, se è connesso nella topologia indotta (ereditata) dall'ambiente in cui è immerso.

Oss. La connessione interessa allo psicanalista, che considera connessi due punti, se appartengono alla stessa catena significante. Allora lo psicanalista può comprendere la seguente definizione.

Def. 11. [Punti connessi in R] *Si dice che due punti sono* connessi in *R, se in R esiste un insieme connesso che li contenga entrambi.*

Oss. La relazione di connessione tra punti è una relazione di equivalenza. Infatti: a) un punto è connesso a se stesso; b) se p è connesso a q, allora q è connesso a p; se p è connesso a q e q è connesso a r, allora p è connesso a r. Si chiama *componente connessa* la classe (massimale) formata da tutti i punti tra loro connessi.

La trattazione della separazione in termini di punti (e non in termini di insiemi) si fa attraverso i cosiddetti assiomi di separazione. Ne ricordiamo tre, precisando che non andiamo oltre il secondo per non cadere in spazi metrici.

Assioma T_0 [Kolmogorov]. Dati due elementi distinti di uno spazio R, esiste per almeno uno di essi un intorno che non contiene l'altro.

Assioma T_1 [Frechet]. Dati due elementi distinti a e b di uno spazio R, esiste un intorno U_a di a che non contiene b e un intorno U_b di b che non contiene a.

Assioma T_2 [Hausdorff]. Dati due elementi distinti a e b di uno spazio R, esiste un intorno di U_a di a e un intorno U_b tali che $U_a \cap U_b = \varnothing$.

Oss. $T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_0$.

T. 8. *Lo spazio R è* T_1 *(o di Frechet) sse ogni punto è chiuso*.

[Sia R uno spazio T_1. Ogni punto a di $\mathbf{C}\{b\}$ possiede un intorno U_a che non contiene b. Quindi U_a non interseca $\{b\}$ ed è interamente contenuto in $\mathbf{C}\{b\}$. Allora $\mathbf{C}\{b\}$ è aperto perché intorno di ogni suo punto (cfr. T. 0) e $\{b\}$ è chiuso.

Siano $\{a\}$ e $\{b\}$ due chiusi. Allora $\mathbf{C}\{a\}$ è aperto ed è un intorno di b, che non contiene a. Viceversa per b.]

Oss. Il teorema giustifica la definizione di topologia cofinita: una topologia di Frechet con aperti complementari degli insiemi finiti (chiusi), la quale è interessante per spazi infiniti. (Negli spazi finiti coincide con la topologia discreta).

Concludo queste generalità con la definizione di una nozione più debole di quella di frontiera, proposta da Sierpinski.

Def. 12. *Si dice che* βE *è il* bordo *di* $E \subset R$ *se* $\beta E = E \cap (\mathbf{C}\overline{E})$. *Gli elementi di* βE *si chiamano* elementi di bordo.

2. *Semantica topologica*

Possediamo ora gli strumenti per costruire, già all'interno del calcolo proposizionale elementare, un modello topologico della semantica, che falsifichi almeno uno dei tre assiomi del logocentrismo, segnatamente TE.

Operazione analoga tentò Lacan nel seminario sull'*Identificazione*. Usando in modo improprio (metaforico) la topologia combinatoria, in particolare la topologia della superficie del toro, tentò di costruire una dottrina del significante dove non vale il principio di identità. In base alla propria dottrina, la mossa era giustificata dal principio secondo cui il significante non rappresenta se stesso, ma il soggetto per un altro significante. L'intenzione era buona, ma si può fare di meglio. (Si può fare di peggio. Lacan ci riuscì tagliuzzando il piano proiettivo, per esempio nel suo ultimo scritto, *L'Etourdit*).

Nel modello topologico le variabili enunciative di base, indicate con $X, Y, Z, \ldots$, rappresentano sottoinsiemi dello spazio tologico R (o meglio, rappresentano le proprietà caratteristiche di tali insiemi). Come modello degli operatori logici $\vee$ (*vel*) e $\wedge$ (*et*) uso i corrispondenti operatori insiemistici unione $\cup$ e intersezione $\cap$. Per gli altri due operatori, il condizionale e la negazione, uso le definizioni seguenti, già proposte da Tarski (Cfr. A. Tarski, *Der Aussagenkalkül und die Topologie*, "Fundamenta Matematicae", 31, 1938, pp. 103-134, la cui traduzione è nel sito in *Logica del tempo*). Le definizioni di questi operatori fanno giocare in modo essenziale concetti topologici, in particolare la nozione di punto limite attraverso la chiusura di insiemi.

Per la negazione ~ (*non*) vale una definizione prudenziale.

Def. 1. [Negazione] *Per ogni* $X \subset R$, $\sim X =_{\mathrm{df}} \mathbf{C}(\overline{X})$.[10]

Oss. La negazione si realizza in due tempi: prima si calcola la chiusura dell'insieme, poi si calcola il complemento dell'insieme così ottenuto. Il ricorso alla chiusura, quindi ai punti limite, si giustifica intuitivamente. Data una proprietà, che definisce un insieme, la si nega considerando l'insieme degli elementi che non la soddisfano. Tra questi non devono

[10] In generale, la separazione offerta dalla negazione non è completa (Cfr. def. 10). La negazione tarskiana, come la freudiana, non nega in modo categorico.

figurare gli elementi che la soddisfano “per quanto poco”, cioè i punti limite dell’insieme definito da quella proprietà.

Per il condizionale $\rightarrow$ (*sequitur*) vale una definizione di matrice stoica, secondo la quale X implica Y se è falso che sia vero X e contemporaneamente falso Y. In simboli, $\sim(X \wedge \sim Y)$.

Def. 2. [Condizionale] *Per ogni* $X, Y \subset R$, $X \rightarrow Y =_{\mathrm{df}} \mathbf{C}(\overline{X \cap \mathbf{C}(\overline{Y})})$.

Nel modello topologico i teoremi (o tautologie) e le assurdità (o contraddizioni) sono particolari funzioni costanti φ, costruite con gli operatori suddetti. Valgono le definizioni seguenti.

Def. 3 [Tautologia] *Si dice che la funzione* φ *è una* tautologia *se* $\varphi(X, Y, Z, \ldots) = R$, *per ogni* $X, Y, Z, \ldots \subset R$.

In particolare, se $\varphi(X, Y, Z, \ldots) \neq R$, *per qualche* $X, Y, Z, \ldots \subset R$, allora φ non è una tautologia.

Def. 4. [Assurdità] *Si dice che la funzione* φ *è un’*assurdità se $\varphi(X, Y, Z, \ldots) = \emptyset$, *per ogni* $X, Y, Z, \ldots \subset R$.

In base a queste definizioni dimostro che negare equivale ad affermare l’assurdo. (*Ex falso quodlibet* o principio di Pseudo-Scoto).

T. 0 [Negare o implicare l’assurdo] $\sim X$ *sse* $X \rightarrow \emptyset$.

[$\boldsymbol{C}\overline{X}$ sse $\mathbf{C}(\overline{X \cap \mathbf{C}(\overline{\emptyset})})$ per le definizioni 1 e 2;

$\boldsymbol{C}\overline{X}$ sse $\mathbf{C}(\overline{X \cap \mathbf{C}(\emptyset)})$ perché $\overline{\emptyset} = \emptyset$ (dimostrarlo per esercizio)

$\mathbf{C}\overline{X}$ sse $\mathbf{C}(\overline{X \cap R})$ perché il complemento del vuoto è l’intero spazio

$\mathbf{C}\overline{X}$ sse $\mathbf{C}\overline{X}$ perché $X = X \cap R$.

Il teorema vale per la legge di identità. (Un po’ di logocentrismo non guasta).]

Questo teorema sarebbe piaciuto a Freud. Nell’apparato psichico la negazione non sempre nega. “La madre non è” significa “è la madre”. Nel saggio sulla *Negazione* Freud sostiene che (il simbolo del) la negazione serve a far tornare alla coscienza il rimosso. È vero che la negazione non sempre nega. Per esempio, non nega il sapere. Negare il sapere non implica alcun assurdo, ma… sapere. (Da Socrate a Cartesio). La negazione si guadagna solo quando si dimostra che l'affermazione ("è la madre") implica l'assurdo.

(Tra parentesi, nelle formazioni oniriche l'assurdo rappresenta, secondo Freud, la messa in ridicolo di un personaggio o di una situazione. Sui rapporti tra verità, negazione e riso ci sarebbe molto da dire. Ci vorrebbe un altro Seminario… Qualcosa in proposito ha detto Rosella Prezzo in una un'antologia, intitolata *Ridere la verità*, Cortina, Milano 1997).

L'argomento antilogocentrico si conclude con il teorema seguente.

T. 1. [Decadenza TE forte] *Se X è un aperto non vuoto dello spazio connesso R, allora $\sim X \cup X \neq R$.*

[La dimostrazione si fa per assurdo. Supponiamo che $\sim X \cup X = R$. Per la Def. 1 $\sim X \cup X = \mathbf{C}(\overline{X}) \cup X = R$. $\mathbf{C}(\overline{X})$ è un aperto, perché è il complemento del chiuso $\overline{X}$. Allora R è l'unione dei due aperti X e $\mathbf{C}(\overline{X})$ non vuoti e disgiunti. Ma questo è assurdo, perché R è connesso. (Dimostrare per esercizio che $\mathbf{C}(\overline{X}) \cap X = \varnothing$.) Quindi, la supposizione di partenza non vale, ma vale il teorema.]

T. 2. [Decadenza TE debole] *Se $X \subset R$ è non vuoto e aperto, allora $\sim X \cup \sim\sim X \neq R$.*

[Si dimostra come il precedente, dato che $\mathbf{C}(\overline{\mathbf{C}(\overline{X})})$ è aperto.]

Questi teoremi dimostrano che TE, sia in forma forte (T. 1) sia in forma debole (T. 2), non è teorema valido in ogni spazio topologico, ma vale solo in spazi non connessi. Ciò costituisce una seria limitazione per un'ontologia, come quella logocentrica, che pretenda di essere una metafisica universalmente valida.

La seguente precisazione ha valore storico. Esiste, infatti, un particolare spazio topologico connesso, dove TE non vale. Si tratta dello spazio topologico R che interpreta classicamente l'infinito come *apeiron*, o infinito indeterminato, cioè come finito sempre più grande, ma finito. Questa topologia si potrebbe chiamare zenoniana, a ricordo dei passi di Achille e la tartaruga, che rimangono sempre iniziali e non giungono mai al traguardo. Preferisco chiamarla topologia dei tratti iniziali.[11] (Dimostrare per esercizio che è connessa).

[11] Aristotele si deve essere reso oscuramente conto che l'infinito zenoniano del sempre più grande era in contrasto con il logocentrismo e adottò la concezione dell'infinito potenziale, che non esiste, cioè non è attuale. La concezione aristotelica durò fino a

Come caso particolare considero lo spazio topologico $(N, F^{<})$, dove l'insieme sostegno è l'insieme degli interi non negativi e la famiglia caratteristica di aperti è formata dai tratti iniziali di interi non negativi, disposti in successione crescente:

$\{0\}$,
$\{0, 1\}$,
$\{0, 1, 2\}$
…

Sia $X \subset R$ un aperto diverso da R. Allora, $X \vee \sim X = X \cup \mathbf{C}(\bar{X})$. Ma $\bar{X} = R$. Quindi, $X \vee \sim X = X \cup \mathbf{C}R = X \cup \varnothing \neq R$. Il merito di aver segnalato l'incompatibilità tra infinito – anche solo indeterminato – e TE è di Brouwer, che sospese il TE e fece spazio all'infinito. Nacque così l'mtuizionismo.

Il lavoro di Cantor è andato ancora più avanti sulla strada dell'antilogocentrismo, proponendo – direi – una sorta di aritmocentrismo. Non solo ha reso l'infinito attuale, ma ha esteso la nozione di numero al di là del conteggio. Ma su questo argomento non mi posso diffondere.

Segnalo *en passant* che la topologia dei tratti iniziali è adatta a fondare l'eziologia classica, che consente di risalire dall'evento alla causa prima in un numero *finito* di passi, rappresentanti le cause intermedie.[12] Dal punto di vista topologico infinito indeterminato e principio di ragion sufficiente insieme stanno e insieme cadono.

Scendendo dalla metafisica alla pratica del contare, che impariamo da piccoli, Brouwer aveva già dimostrato con controesempi che TE vale nel caso finito, cioè per insiemi che si possono contare sulle dita. La topologia dà un interpretazione interessante del contare. Contare significa racchiudere degli elementi in un insieme chiuso, per esempio nel pugno della mano. Nella terza lezione conosceremo la topologia cofinita, dove gli aperti sono i complementari degli insiemi finiti. Si tratta di una topologia connessa, dove perciò in generale non vale TE. Tuttavia, se X è chiuso, quindi finito. si verifica che TE vale. Ritroviamo così Brouwer e la validità di TE per insiemi finiti.

Gauss compreso. La topologia dei tratti iniziali è un esempio di algebra di Heyting, un calcolo compatibile con la logica intuizionista di Brouwer. In essa il complemento del non vuoto è il vuoto, mentre il complemento del vuoto è l'intero spazio. Ovviamente non soddisfa TE.

[12] Anche Freud fa uso di questa topologia nella sua *Eziologia dell'isteria* del 1986, dove presuppone una successione finita di scene traumatiche, che collegano retrospettivamente il sintomo isterico alla scena primaria. La regressione finita dagli effetti alle cause è anche il fondamento logocentrico delle dimostrazioni di esistenza di dio.

In realtà, per $X \subset R$ non vuoto chiuso vale il teorema duale di 1 in ogni spazio topologico.

T. 1'. [Permanenza TE forte] *Se $X \subset R$ è non vuoto chiuso, allora $\sim X \cup X = R$, per ogni spazio topologico R.*

[Dimostrazione per esercizio.]

Per dimostrare che in spazi non connessi non vale la legge di doppia negazione forte (o eliminazione della negazione) occorre il seguente

Lemma. *Se* $\mathbf{C}(\overline{X \cap \mathbf{C}(\bar{Y}})$), *allora* $\mathbf{C}(\overline{\overline{\mathbf{C}(X \cup \mathbf{C}(\bar{Y}}}))$).

T. 3. [Decadenza doppia negazione forte.] *Se $X \subset R$ è non vuoto aperto, allora $\sim\sim X \rightarrow X \neq R$.*

[Si dimostra come i precedenti, applicando il lemma.]

Per dimostrare che in spazi non connessi valgono le tautologie classiche si rimanda al testo di Tarski, avvertendo di una variante terminologica. Tarski parla di spazi *isolati* o *degeneri*, invece di non connessi.

3. *Conclusione intuizionista*

Concludendo, l'ontologia logocentrica guadagna l'apparente unificazione dell'essere, a patto di disgregare lo spazio che lo sostiene. Per conservare il TE, che gli consente di fondare l'Essere sull'Uno, categoricamente inteso, deve frammentare lo spazio sottostante. Bello, no? Lo psicanalista dovrebbe tenere bordone a queste forme di inganno intellettuale? Per esempio, evitando di affrontare questioni relative alla struttura dello spazio, o della *res extensa*, alla stregua di un filosofo accademico? (Ma anche Freud, nonostante le sue topiche, non brilla per interessi topologici. Sulle 7000 pagine delle sue *Gesammelte Werke* il *Gesamtregisgter* riporta solo 25 ricorrenze del riferimento *Raum.*)

La proposta di Brouwer di una logica intuizionista, dove il TE decade, è oggi poco recepita. Peccato. Ha certamente dalla sua il merito di aprire il discorso della semantica infinita, sconosciuto alla logica binaria forte. Della necessità di semantiche infinite in logica intuizionista aveva già nel 1932 avvertito i contemporanei il grande teorico dell'incompletezza (di ogni assiomatizzazione) dell'aritmetica, Kurt Gödel.[13] Tarski raccolse

---

[13] La dimostrazione di Gödel sta nel margine della pagina. Vale la pena riportarne una variante, perché giustifica la convocazione dell'infinito a partire dall'indebolimento del terzo escluso. Consideriamo la formula F_n formata dall'alternativa delle equivalenze $a_i \leftrightarrow a_k$ (con $1 \leq i < k \leq n$). F_n è soddisfatta da ogni semantica con meno di n valori di verità.

l'avvertimento del collega e, dopo aver approfondito i rapporti di relativa incompatibilità tra verità e infinito, nel testo rimasto classico del 1933, che fonda la sematica tarskiana, nel 1938 disegnò una semantica topologica, costituita da spazi infiniti, densi e normali, adeguata alla logica intuizionista. Ma il suo lavoro rimase praticamente lettera morta. La questione fu riaperta trent'anni dopo da Kripke, che ebbe il merito di proporre modelli semantici intuizionisti letteralmente più intuitivi: i preordini infiniti, cioè universi infiniti che godono di due proprietà basilari: la riflessività (corrispondente a I) e la transitività (già gettonata dalla sillogistica aristotelica). Un esempio di preordine alla portata di chi è entrato in questo sito è proprio l'organizzazione del sito: una pagina è accessibile a se stessa (riflessività); se dalla pagina *a* accedi alla pagina *b* e se dalla pagina *b* accedi alla pagina *c*, allora dalla pagina *a* accedi alla pagina *c* Non necessariamente in un unico passo). L'unica differenza con la semantica kripkeana è che le pagine del sito non sono attualmente infinite.

Per lo psicanalista quella intuizionista dovrebbe essere una buona novella. Infatti, l'infinito è il luogo dove si può sviluppare una metapsicologia scevra dai condizionamenti dell'adeguamento alla volontà del potere. In ultima analisi la logica dell'infinito è più adatta a cogliere la dinamica dell'oggetto del desiderio, supposto infinito. L'analista sa benessimo che non c'è adeguamento del soggetto all'oggetto del desiderio. La ragione è che non c'è adeguamento che tenga con l'infinito. Neanche il dittatore più folle, nealche il Super-Io più severo, possono forzare l'infinito nei propri schemi. L'infinito è libertà, diceva Cartesio, perciò fa orrore, oggi come ai vecchi tempi, e si censurano i suoi *avatars*. Intuizionismo in testa.

Ma noi non ci facciamo intimidire e restiamo attaccati alla nostra "cosa infinita". Brouwer la chiamava "sfuggente", non essendo né totalmente razionale, per via che non è categorica, né totalmente empirica, per via che non si domina contando sulle dita. Una cosa, insomma, che richiede un saperci fare di tipo artistico per essere trattata.

4. *E lo psicanalista?*

Che ci "azzecca" l'argomento antilogocentrico con lo psicanalista?

Infatti, in ogni sostituzione delle variabili a_i con valori di verità almeno una delle alternative $a_i \leftrightarrow a_k$ è vera (quindi è vera F_n), essendo a_i e a_k sostituiti dallo stesso valore di verità. (Principio dei cassetti: dati *n* cassetti e *m* palline, se $n < m$, allora almeno un cassetto avrà due palline.) Ma F_n non è dimostrabile in logica intuizionista, dove l'alternativa è dimostrabile se lo è uno dei suoi termini (indebolimento di TE). Nella fattispecie i termini dell'alternativa F_n non sono dimostrabili classicamente, quindi a maggior ragione intuizionisticamente. Allora il calcolo proposizionale intuizionista o è incompleto o ha una semantica infinita. Ma si dimostra che la logica intuizionista è completa (cioè ogni verità è dimostrabile), quindi la sua semantica è infinita.

Direi molto, appena esce dall'*ortus conclusus* della dottrina ricevuta nell'assocociazione dove – a caro prezzo – si è (de)formato. Che lo spazio dove si esercita la parola sia connesso è per l'analista la scoperta dell'acqua calda. Il mio argomento pretende solo di fare di questa scoperta una riscoperta, mettendo in evidenza il nuovo che essa contiene e che era già lì ma nessuno ci badava.

(L'ho già detto nella lezione zero. Io sono ricercatore. Quindi preferisco lavorare in contesti di scoperta piuttosto che di giustificazione, lavoro che lascio volentieri ai professori. Ma sono un ricercatore *sui generis*. Come analista mi dedico alla riscoperta. Alla riscoperta dei fantasmi nei pazienti, alla riscoperta dei teoremi psicanalitici nei pensatori che non pensavano alla psicanalisi. Per esempio il mio lavoro di logica epistemica è solo la riscoperta dell'intuizionismo di Brouwer e… Cartesio, che hanno prodotto teoremi freudiani senza saperlo. Cfr. *Una matematica per la psicanalisi* nella pagina "sapere del tempo" nel sito).

L'analista ha a che fare con le connessioni sin dal principio della cura. Le chiama libere associazioni. All'analizzante la regola analitica impone di produrne a bizzeffe. Il punto su cui non ci si sofferma mai abbastanza è che la stragrande di loro sono false. Sono falsi nessi, *falsche Verknupfung*, li chiamava Freud nel lontano 1895 negli *Studi sull'isteria.* Sono falsi nessi: i transfert (falsi nessi sul medico, ma non solo), i lapsus (falsi nessi di memoria o di giudizio), i sintomi e i sogni (falsi nessi, rispettivamente, sul godimento e il desiderio), le costruzioni in analisi (falsi nessi, addirittura deliri, secondo Freud, che orientano la risistemazione analitica della propria storia).

Bella conquista, direte voi. Volevi farci credere che avremmo riguadagnato la vera dimensione del *logos* e invece ci troviamo impantanati nel falso che ci circonda da tutte le parti. Come ce la caviamo?

Niente paura. Come in un libretto rimasto purtroppo incompiuto proponeva Spinoza (vai alla pagina "Spinoza" e alla sua pagina dipendente nel sito), si tratta di niente di meno che di riformare l'intelletto. Cioè? Si tratta di cessare di concepire il vero e il falso in modo logocentrico, ossia come coppia antitetica. Vero e falso sono gli estremi – non saprei dire quale iniziale e quale finale – di un processo: la dialettica epistemica. Il vero non è semplicemente il contrario del falso ma è innanzitutto il terreno di cultura dove cresce altro vero, quello nuovo. Il falso non è soltanto il contrario del vero ma è un vero "virtuale", si direbbe in epoca di Internet, cioè un vero, non tanto potenziale, ma meno ben saputo – io lo chiamo "vero congetturale". Il vero-falso serve a innescare il processo di ridefinizione del vero lungo una serie di approssimazioni infinite. In questa logica il criterio di verità non è l'adeguamento ortodosso dell'intelletto alla cosa, ma è l'attività dell'intelletto che produce nuove congetture.

Analogamente il falso non è l'errore ma l'erranza. Comincia con l'oscura percezione della "cosa", innanzitutto corporea, che contiene un po' di verità, e vaga per spazi espistemici, di cui non conosce la mappa, dove prenderà sicuramente lucciole per lanterne, ma dove troverà anche qualche lanterna che fa più luce di prima.

Un carattere essenziale di questa logica congetturale è la temporalità. Non a caso ho intitolato la pagina di logica di questo sito "sapere del tempo". La logica fortemente binaria è atemporale: tutto ciò che vero è vero da sempre e per sempre, tutto ciò che è falso è falso da sempre e per sempre. Il passaggio dal vero al falso o dal falso al vero, tipicamente grazie all'operatore negazione, è istantaneo. La negazione del vero è subito il falso. La negazione del falso è subito il vero.

Diversamente vanno le cose nella logica congetturale, specialmente in versione intuizionista. Per negare una congettura bisogna passare in rassegna una serie, generalmente infinita, di stati epistemici sempre più forti e verificare che in ciascuno di essi non vale. Solo alla fine del processo, se si conclude, la congettura sarà falsificata. Analogamente per il condizionale. Dato X si deve verificare che in nessuno degli stati epistemici a valle di X si verifica la negazione di Y. Solo allora si può affermare il condizionale $X \rightarrow Y$. Lacan lo chiama tempo logico. Io preferisco chiamarlo, più propriamente, tempo epistemico, perché è il tempo in cui si elabora e alla fine si guadagna un sapere, come dicono i tedeschi.

Ho accennato al corpo. Con il riferimento al corpo, come luogo del falso epistemico, termina la prima lezione e comincia la seconda, che mi auguro sia altrettanto interessante della prima.

BIBLIOGRAFIA

N. Bourbaki, *Eléments de mathématique. Livre III. Topologie générale* (1952-1968)*,* Diffusion C.C.L.S., Paris 1971.

V. Checcucci, A, Tognoli, E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale* (1968), Feltrinelli, Milano 1972.

W. Sierpinski, *General Topology* (1948), Dover, New York 2000.

L.A. Steen, J.A. Seebach jr, *Counterexamples in Topology* (1970), Dover, New York 1995.

Aggiornata il 27 agosto 2008.