Una dimostrazione congetturale.

I numeri primi gemelli del tipo (p, p+2) sono infiniti?

Se fossero finiti, esisterebbe un numero n tale che la probabilità di incontrare una coppia di gemelli dopo n numeri primi è 0. Ma la probabilità di trovare un primo dopo n primi è (di poco) superiore a $(1–1/2)(1–1/3)…(1–1/p_k)$, dove $p_k = [\sqrt{p_n}]$ (= il più grande intero dispari minore di $\sqrt{p_n}$). A sua volta questo prodotto è superiore a $1/p_k$, per un noto lemma sui numeri dispari. Pertanto la probabilità di trovare due numeri primi consecutivi dopo n numeri primi è superiore alla somma della serie $1/p^2_k + 1/p^2_{k+1} + 1/p^2_{k+2} + \ldots$ Questa serie converge a un valore finito maggiore di 0, in quanto maggiorata dalla serie di Eulero degli inversi dei quadrati. La contraddizione dimostra “congetturalmente” l’esistenza di infinite coppie di numeri primi gemelli.

Dove sta l’errore? Questa dimostrazione è falsa (nel mio linguaggio è “congetturale”), tuttavia contiene un po’ di verità, che la rende ulteriormente elaborabile.

Sempre nell’ambito dei numeri esiste una bellissima dimostrazione congetturale che si può far risalire a Gauss. In effetti, si tratta di una dimostrazione sconvolgente perché, a differenza della precedente non è solo “un po’ falsa”, ma è addirittura “molto vera”. Gauss congetturò il teorema, dimostrato 90 anni dopo di lui, riguardante la distribuzione dei numeri primi. Questo teorema ammette un’interpretazione probabilistica. Con buona approssimazione la probabilità che il numero n sia primo è $1/\log n$, dove log indica il logaritmo naturale. La cosa curiosa (sconvolgente) è che, se si integra questa funzione da 2 a n, si ottiene con ottima approssimazione – in effetti, è la migliore approssimazione oggi disponibile – il numero di numeri primi inferiori o uguali a n (formula del logaritmo integrale). Il fatto sconvolgente (per i non profani) è la possibilità che una (densità di) probabilità infinitesima, dia come risultato dell’integrazione un numero grande a piacere.

Ma forse non è bene titillare troppo questi paradossi.