Funzione e concetto[1]
di Gottlob Frege

Molto tempo fa[2] ebbi l'onore di riferire a questa Società sul complesso di notazioni, da me chiamato "ideografia". Oggi vorrei chiarire un altro aspetto dello stesso argomento, comunicando aggiunte e innovazioni, la cui necessità mi si è da allora imposta. Per l'occasione non esporrò in modo completo la mia ideografia, ma ne metterò in evidenza solo alcune idee di fondo.

Parto da ciò che in matematica si chiama *funzione*. Questa parola non ebbe subito il significato così ampio acquisito in seguito. Sarà bene cominciare trattando le modalità d'uso originarie, esaminando solo in un secondo tempo le successive estensioni. In prima battuta voglio parlare solo delle funzioni di un solo argomento. Un'espressione scientifica mostra tutta la propria specifica rilevanza la prima volta in cui enuncia una regolarità. Per la funzione ciò si verificò ai tempi della scoperta [2] dell'analisi superiore, quando per la prima volta si trattò di esplicitare le leggi generali valide per le funzioni. Per sapere cosa in matematica si intese da principio con la parola *funzione*, dobbiamo riandare ai tempi della scoperta dell'analisi superiore. In risposta alla domanda si ottiene: "Per funzione di x si intende un'espressione di calcolo che contiene x, una formula che include la lettera x". Così, per esempio, l'espressione

$$2 \cdot x^3 + x$$

sarebbe una funzione di x e

$$2 \cdot 2^3 + 2$$

una funzione di 2.

Questa risposta non può soddisfare, perché non distingue tra forma e contenuto, tra segno e cosa designata – un errore, in verità, che si incontra spesso ancora oggi negli scritti di matematici anche famosi. Ho già richiamato l'attenzione sulla mancanza [di rigore] delle correnti teorie formali in aritmetica.[3] Vi si parla di segni che non hanno e non devono avere contenuto, ma poi si attribuiscono loro proprietà che possono ragionevolmente convenire solo al loro contenuto. Lo stesso qui: una mera espressione, la forma per un contenuto, [3] non può essere l'essenza della cosa; solo il contenuto lo può. Qual è dunque il contenuto, il significato, di "$2 \cdot 2^3 + 2$"? "18" o "$3 \cdot 6$"? L'equazione $2 \cdot 2^3 + 2 = 18$ esprime il fatto che il gruppo di termini a destra ha lo stesso significato di quello a sinistra. Qui mi devo opporre alla concezione secondo cui, per esempio, $2 + 5$ e $3 + 4$ siano uguali ma non siano la stessa cosa. Alla base di questa opinione sta ancora una volta lo scambio tra forma e contenuto. Sarebbe come pretendere di considerare diverse la violetta profumata e la *Viola odorata*, solo perché i nomi suonano diversi. La sola differenza di designazione non può bastare a giustificare una differenza nelle cose designate. Qui la cosa è solo un po' meno trasparente, perché il significato del segno numerico 7 non si percepisce con i sensi. L'attuale diffusa tendenza a non riconoscere come oggetto niente che non sia percepibile con i sensi[4] porta a considerare le cifre come numeri, che sono il vero oggetto in questione.[5] In tal

---

[1] Conferenza tenuta nella seduta del 9.1.1891 della Società Jenense per la Medicina e le Scienze naturali. Traduzione dal tedesco di Antonello Sciacchitano.

[2] 10 gennaio 1879 e 27 gennaio 1882.

[3] *I fondamenti dell'aritmetica*, Breslau 1884, § 92 sg. e Atti della Società Jenense per la Medicina e le Scienze naturali, seduta del 17 luglio 1885.

[4] [Frege non è né positivista né aristotelico. N.d.T.]

[5] Cfr. i saggi di H. von Helmoltz, *Contare e misurare dal punti di vista della teoria della conoscenza*, e di L. Kronecker*, Sul concetto di numero* (*Saggi filosofici*, dedicati al giubileo di E. Zeller, Lipsia 1887).

caso, ovviamente, 7 e 2 + 5 sarebbero diversi. Ma tale concezione è insostenibile, dato che non si può parlare di una qualsiasi proprietà aritmetica [4] dei numeri senza riandare al significato dei numeri. Per esempio, la proprietà del numero 1 di dare se stesso, se moltiplicato per se stesso, sarebbe invenzione pura; nessun esame chimico o microscopico potrebbe mai scoprire questa proprietà nell'innocente figura che chiamiamo cifra dell'uno. Si parla forse di definizione? Ma nessuna definizione è tanto creativa da conferire a una cosa proprietà che neppure possiede, eccetto quella introdotta per esprimere e designare ciò per cui la definizione introduce il segno come suo segno.[6] Per contro, le figure che chiamiamo cifre hanno proprietà fisico-chimiche dipendenti dai mezzi di scrittura. Si potrebbe immaginare che un giorno vengano introdotte nuove cifre del tutto diverse, come le cifre arabe hanno rimosso quelle romane. Nessuno riterrebbe seriamente di ottenere in questo modo nuovi numeri, nuovi oggetti dell'aritmetica con proprietà non ancora esplorate. Dovendo, dunque, distinguere tra cifre e loro significato, si dovrà riconoscere lo stesso significato alle espressioni "2", "1+1", "3–1", "6:3". [5] Infatti, non si vede in che cosa consisterebbe la differenza. Si potrebbe forse dire che 1+1 è una somma, mentre 6:3 è un quoziente. Ma che cos'è 6:3? Il numero che moltiplicato per 3 dà 6. "*Il* numero", non "*un* numero". Con l'articolo determinativo si allude al fatto che ce n'è uno solo. Ora,

$$(1+1) + (1+1) + (1+1) = 6,$$

e dunque (1+1) è il numero che era stato designato come (6:3). Le diverse espressioni corrispondono a diverse concezioni e a diversi aspetti, ma pur sempre della stessa cosa. Altrimenti l'equazione $x^2 = 4$ non avrebbe solo le due radici 2 e –2, ma anche (1+1) e innumerevoli altre, tra loro diverse, anche se da un certo punto di vista simili. Riconoscendo solo due radici reali, si rigetta il punto di vista secondo cui il segno di uguaglianza non significherebbe piena concordanza ma solo parziale coincidenza. Tenendo presente questo, vediamo che le espressioni

$$\text{“}2 \cdot 1^3 + 1\text{”}$$
$$\text{“}2 \cdot 2^3 + 1\text{”}$$
$$\text{“}2 \cdot 4^3 + 1\text{”}$$

significano numeri, cioè 3, 18, 132. Se ora la funzione significasse solo un'espressione di calcolo, allora sarebbe un numero senza alcun nuovo guadagno per l'aritmetica. È vero che di solito la parola "funzione"fa pensare a espressioni [6] in cui la lettera x indica un numero solo in modo indeterminato, come

$$\text{“}2 \cdot x^3 + x\text{”},$$

ma ciò non cambia nulla. Infatti, questa espressione indica un numero, anche se indeterminato. Che lo scriva al suo posto o scriva solo "*x*", non fa alcuna differenza di fondo.

Tuttavia, la scrittura con la "*x*", che designa in modo indeterminato [un numero], ci guida alla concezione giusta. Si dice che x è l'argomento della funzione e in

$$\text{“}2 \cdot 1^3 + 1\text{”}$$
$$\text{“}2 \cdot 4^3 + 1\text{”}$$
$$\text{“}2 \cdot 5^3 + 1\text{”}$$

[6] Si tratta sempre di annettere a un segno un senso o un significato. Se senso e significato mancano, non si può parlare propriamente né di segno né di definizione.

si riconosce la stessa funzione, solo con argomenti diversi, cioè 1, 4 e 5. L'essenza propria della funzione va riconosciuta in ciò che quelle espressione hanno in comune, cioè in ciò che è presente in

$$“2 \cdot x^3 + x”,$$

a parte la x, che potremmo scrivere anche così:

$$“2 \cdot ()^3 + ()”.$$

Quel che per me è importante è mostrare che l'argomento non fa parte della funzione, ma che insieme alla funzione forma un tutt'uno. Infatti, di per sé la funzione va detta incompleta, bisognosa di completamento o insatura. In ciò le funzioni si differenziano radicalmente dai numeri. E ciò spiega perché riconosciamo la stessa funzione in espressioni diverse come “$2 \cdot 1^3 + 1$” e “$2 \cdot 2^3 + 1$”, anche se significano numeri diversi, mentre non ritroviamo la stessa funzione in “$2 \cdot 1^3 + 1$” [7] e “4–1”, nonostante abbiano lo stesso valore numerico. A questo punto vediamo anche come sia facile essere tentati di vedere nella forma dell'espressione l'essenziale della funzione. Nell'espressione riconosciamo la funzione in quanto la vediamo scomposta – scomposizione suggerita dalla sua formazione.

Le due parti in cui viene così scomposta l'espressione di calcolo – il segno dell'argomento e l'espressione della funzione – sono eterogenee, poiché l'argomento è un numero, cioè un tutto in sé concluso, cosa che la funzione non è. Si può paragonare alla partizione di un segmento mediante un punto. Si tende ad assegnare il punto di partizione a entrambi i segmenti. Ma se si intende la partizione in senso stretto, in modo che nulla venga contato due volte e nulla sia tralasciato, allora bisogna assegnare il punto di partizione a uno dei due segmenti. Allora questi diventa in sé pienamente concluso e [il punto] può essere paragonato all'argomento, mentre all'altro segmento manca qualcosa. Infatti, il punto di partizione, che potremmo chiamare punto terminale del segmento, non gli appartiene. Solo quando lo si completa con un punto terminale (o un segmento con due punti terminali) si ottiene qualcosa di completo. Per esempio, [8] nella funzione “$2 \cdot x^3 + x$”, la x non va trattata come parte della funzione, ma come indicatore del tipo di completamento richiesto, che rende riconoscibili i posti dove deve subentrare il segno dell'argomento.

Quel che si ottiene completando la funzione con il proprio argomento, lo chiamiamo *valore* della funzione per questo argomento.[7] Così, per esempio, 3 è il valore della funzione “$2 \cdot x^3 + x$” per l'argomento 1, poiché abbiamo $2 \cdot 1^3 + 1 = 3$.

Esistono funzioni il cui valore è sempre lo stesso, qualunque sia il loro argomento, come per esempio $2+x–x$ o $2+0 \cdot x$, per le quali si ha $2 = 2+x–x$ e $2 = 2+0 \cdot x$. Prendendo l'argomento insieme alla funzione, dovremmo considerare il numero 2 come questa funzione. Ma sarebbe sbagliato. Anche se in questo caso il valore della funzione è sempre 2, la funzione stessa è diversa dal numero 2. Infatti, l'espressione di una funzione deve sempre esibire uno o più posti determinati per essere riempiti dai segni dell'argomento, [cosa che il numero 2 non fa].

Il metodo della geometria analitica offre un mezzo per rendere intuitivi i valori di una funzione per diversi argomenti. Infatti, trattando l'argomento di una funzione come valore numerico delle ascisse e il corrispondente valore della funzione come valore dell'ordinata di un punto, [che ha quel valore di ascissa,] otteniamo un complesso di punti che nei casi comuni si presenta all'intuizione come curva. Ciascun punto della curva corrisponde a un argomento con il relativo valore.[8]

---

[7] [Qui Frege passa sotto silenzio il fatto importante che la funzione sia *univoca*, cioè per ogni valore dell'argomento determini un solo valore della funzione. N.d.T.]

[8] [La concezione fregeana di funzione è estensionale. Oggi, il suo enunciato si riformulerebbe così: “Ciascun punto della curva corrisponde alla coppia ordinata

Così, per esempio, [9]

$$y = x^2 - 4x$$

dà una parabola, dove "*y*" indica il valore della funzione e al tempo stesso il valore numerico dell'ordinata, mentre "*x*" indica sia l'argomento della funzione sia il valore numerico dell'ascissa. Se a questo punto facciamo il confronto con la funzione

$$[y =]\ x(x–4),$$

troviamo che per lo stesso argomento questa ha sempre lo stesso valore dell'altra. In generale si ha

$$x^2 - 4x = x(x–4),$$

qualunque numero si prenda per x. Quindi la curva ottenuta da

$$y = x^2 - 4x$$

è la stessa di quella risultante da

$$y = x(x–4).$$

Esprimo questo fatto così: la funzione $x(x–4)$ ha lo stesso decorso di valori della funzione $x^2 - 4x$.

Scrivendo

$$x^2 - 4x = x(x–4),$$

non abbiamo uguagliato una funzione all'altra, ma solo i loro valori. Intendendo questa eguaglianza in modo che essa valga per ogni valore di x, abbiamo espresso la generalità di un'eguaglianza [, cioè un'identità]. Ma potremmo anche dire: "il decorso dei valori della funzione $x(x–4)$ è uguale [10] a quello della funzione $x^2 - 4x$" e avremmo un'eguaglianza tra decorsi di valori. A me sembra che non sia dimostrabile, ma che si debba assumere come legge logica fondamentale, la possibilità di concepire la generalità dell'eguaglianza dei valori di una funzione come un'eguaglianza, precisamente come uguaglianza tra decorso dei valori.[9]

Può convenire introdurre una stenografia per il decorso dei valori di una funzione. A tal fine sostituisco il segno dell'argomento nell'espressione di una funzione con il segno di una vocale greca, chiudo il tutto tra parentesi e vi prepongo la stessa lettera greca con uno spirito lene. Per esempio,

$$'\varepsilon(\varepsilon^2–4\varepsilon)$$

è il decorso dei valori della funzione $x^2–4x$ e

$$'\alpha(\alpha \cdot [\alpha–4])$$

è il decorso dei valori della funzione $x(x–4)$.[10] In questo modo l'uguaglianza

$$\text{“}'\varepsilon(\varepsilon^2–4\varepsilon) = '\alpha(\alpha \cdot [\alpha–4])\text{”}$$

esprime il fatto che il decorso dei valori della prima funzione è lo stesso di quello della seconda. Le lettere greche sono state intenzionalmente scelte per indicare che niente ci costringe a scegliere la stessa lettera. [11] L'equazione

$$\text{“}x^2–4x = x \cdot (x–4)\text{”}$$

esprime lo stesso senso, se l'intendiamo come sopra, ma in un altro modo. Rappresenta il senso come generalità di un'eguaglianza, dove tanto il lato destro quanto il sinistro hanno un significato in sé concluso. In

$$\text{“}x^2–4x = x \cdot (x–4)\text{”}$$

---

formata dall'argomento della funzione e dal relativo valore (x, y)". Il grafico della funzione è un sottoinsieme dell'insieme prodotto $\{X\}\times\{Y\}$. N.d.T.]

[9] In alcune accezioni della terminologia matematica corrente la parola "funzione" corrisponde a quel che qui ho chiamato decorso dei valori di una funzione. Ma, nel senso qui adottato della parola, il senso di "funzione" è logicamente antecedente.

[10] [Negli anni Trenta questa notazione sarà ripresa nel λ-calcolo di Church, che si rivelerà fondamentale per l'informatica teorica. N.d.T.]

il lato di sinistra, considerato da solo, indica un numero solo in modo indeterminato e altrettanto il lato di destra. Se avessimo la semplice espressione $x^2 – 4x$, potremmo scrivere al suo posto anche $y^2 – 4y$, senza cambiarne il senso. Infatti, tanto "y" quanto "x" significano solo un numero indeterminato. Ma unendo i due termini in una sola eguaglianza, dobbiamo scegliere la stessa lettera da entrambi i lati del segno di eguaglianza. In questo modo possiamo esprimere qualcosa che non è contenuto né nel lato sinistro né nel lato destro né nel segno di eguaglianza. Infatti, è la generalità – la generalità di un'eguaglianza, ma in prima istanza la generalità.

Così come si indica in modo indeterminato un numero con una lettera, per esprimere la generalità occorre indicare in modo indeterminato una funzione con una lettera. A tale scopo ci si serve per lo più delle lettere f e F in modo che in "$f(x)$" e "$F(x)$" la x rappresenti l'argomento. Qui la necessità di completare la funzione trova espressione nel fatto che le lettere f o F recano con sé una [coppia di] parentesi, [12] il cui spazio interno è destinato ad accogliere l'argomento.[11] Pertanto

$$\grave{\varepsilon} f(\varepsilon)$$

indica il decorso dei valori di una funzione, che viene lasciata indeterminata.

In che modo, allora, il progresso scientifico ha ampliato il significato della parola *funzione*? Possiamo distinguere due direzioni.

In primo luogo, infatti, è stata ampliata la gamma delle modalità di calcolo che contribuiscono alla formazione di una funzione. All'addizione, moltiplicazione, elevamento a potenza e alle loro inverse si sono aggiunti diverse specie di passaggio al limite, magari senza avere sempre la chiara consapevolezza dell'essenziale novità. Pertanto è stato necessario rifugiarsi nella lingua parlata nel caso, per esempio, di una funzione il cui valore è 1 per gli argomenti razionali e 0 per gli irrazionali.

In secondo luogo, è stata ampliata la gamma di ciò che può figurare come argomento e valore della funzione, includendovi i numeri complessi. Contestualmente dovette essere ulteriormente specificato il senso delle espressioni "somma", "prodotto" ecc.

Ora io proseguo in entrambe le direzioni. Innanzitutto, ai segni +, – ecc., che servono a formare un'espressione funzionale, [13] aggiungo i segni =, >, <, così da poter parlare, ad esempio, della funzione $x^2 = 1$, dove come in precedenza la x rappresenta l'argomento.[12] Il primo problema che emerge è quello dei valori di questa funzione per diversi argomenti. Costruendo la successione in funzione di x –1, 0, 1, 2, otteniamo

$$(-1)^2 = 1,$$
$$0^2 = 1,$$
$$1^2 = 1,$$
$$2^2 = 1.$$

Di queste eguaglianze la prima e la terza sono vere, le altre false. Dico allora: "il valore della nostra funzione è un valore di verità" e distinguo il valore di verità del Vero da quello del Falso. Da qui "$2^2 = 4$" significa il Vero, proprio come "2^2" significa 4, mentre $2^2 = 1$ significa il Falso. Di conseguenza

$$\text{“}2^2 = 4\text{”, “}2 > 1\text{”, “}2^4 = 4^2\text{”}$$

hanno lo stesso significato [, il Vero,] e pertanto

$$(2^2 = 4) = (2 > 1).$$

è un'uguaglianza giusta.

---

[11] [Una lettera designa in modo indeterminato un numero. Una lettera "bucata" designa in modo indeterminato una generalità. Il buco rappresenta lo spazio dell'argomento, la lettera il valore, la lettera della lettera la funzione. N.d.T.]

[12] [I segni =, >, < introducono una struttura d'ordine o reticolare. Trasformano la logica degli enunciati in un reticolo di Boole. N.d.T.]

Ovviamente si può obiettare che “$2^2 = 4$” e “$2 > 1$” affermano cose completamente diverse, esprimono pensieri completamente diversi. Ma anche “$2^2 = 4$” e “$4 \cdot 4 = 4^2$” esprimono pensieri diversi, tuttavia si può sostituire “2^4” con “$4 \cdot 4$”, poiché entrambi i segni hanno lo stesso significato. Di conseguenza hanno lo stesso significato anche “$2^4 = 4^2$” e “$4 \cdot 4 = 4^2$”. Sembra così che dall’eguaglianza di significato non segua l’uguaglianza di pensiero. [14] Dicendo “la stella della sera è un pianeta che ha un tempo di rivoluzione minore di quello della Terra”, esprimiamo un pensiero diverso da quello della proposizione “la stella del mattino è un pianeta che ha un tempo di rivoluzione minore di quello della terra”. Infatti, chi non sapesse che la stella del mattino è la stella della sera, potrebbe ritenere vera una proposizione e falsa l’altra. Tuttavia, il significato delle due proposizione deve essere lo stesso, perché sono state scambiate le parole “stella della sera” e “stella del mattino”, che hanno lo stesso significato, cioè sono nomi propri dello stesso corpo celeste. Bisogna distinguere senso e significato. “2^4” e “$4 \cdot 4$” hanno lo stesso significato, cioè sono i nomi propri dello stesso numero, ma non hanno lo stesso senso. Quindi “$2^4 = 4^2$” e “$4 \cdot 4 = 4^2$” hanno lo stesso significato ma non lo stesso senso, cioè in questo caso non contengono lo stesso pensiero.[13]

Con lo stesso diritto con cui scriviamo

$$“2^4 = 4 \cdot 4”$$

possiamo anche scrivere

$$“(2^4 = 4^2) = (4 \cdot 4 = 4^2)”$$

e

$$“(2^2 = 4) = (2 > 1)”.$$

[15] Si potrebbe inoltre chiedere a quale scopo siano stati inclusi i segni =, >, < tra quelli per costruire le espressioni di funzioni. Oggi sembra guadagnare sempre più sostenitori l’opinione che l’aritmetica sia una logica più ampia e che la giustificazione più rigorosa delle leggi aritmetiche riporti indietro a leggi puramente logiche e solo ad esse. Anch’io sono di questa opinione[14] e su di essa fondo la richiesta di ampliare quella dell’aritmetica in una notazione logica. Accennerò a come sia possibile in questo caso.

Abbiamo visto che il valore della funzione $x^2 = 1$ è sempre uno dei due valori di verità. Quando per un certo valore dell’argomento, per esempio –1, il valore della funzione è il Vero, possiamo esprimere il fatto così: “il numero –1 ha la proprietà che il suo quadrato è 1” o più brevemente “–1 è una radice quadrata di 1” o ancora “–1 cade sotto il concetto di radice quadrata di 1”. Quando per un certo valore dell’argomento, per esempio 2, il valore della funzione $x^2 = 1$ è il Falso, possiamo esprimere il fatto così: “2 non è la radice di 1” o “2 non cade sotto il concetto di radice quadrati di 1”. Qui si vede la stretta connessione tra ciò che [in aritmetica] chiamiamo funzione e ciò che in

---

[13] Non nego che questo modo di esprimersi possa sembrare a prima vista arbitrario e artificioso e che se ne possa esigere una giustificazione più dettagliata. Cfr. il mio saggio di prossima pubblicazione su senso e significato in “Zeitschrift für Philosophie un phil. Kritik”.

[14] [Il logicismo di Frege si può considerare una forma di resistenza alla scienza, (non tanto) paradossalmente interna al lavoro dello scienziato stesso. È il residuo dell’antico logocentrismo filosofico, che permane all’interno del nuovo programma scientifico di riformulare l’aritmetica su basi assiomatiche. La scoria logocentrica verrà bruciata dal paradosso di Russel e la cenere sarà spazzata via dal teorema di incompletezza di Gödel. Quel che resta dopo questa operazione di pulizia è il metodo assiomatico, depurato da pretese di completezza. N.d.T.]

logica chiamiamo concetto. Sì, possiamo proprio dire: *il concetto è una funzione il cui valore di verità è sempre il Vero*.[15] Anche il valore della funzione

$$“(x+1)^2 = 2(x+1)”$$

è sempre un valore di verità. Otteniamo, per esempio, [16] il Vero per l'argomento –1 e possiamo esprimere questo fatto così: –1 è un numero che è minore di 1 di un numero il cui quadrato è uguale al suo doppio. Così si esprime il fatto che –1 ricade sotto un concetto. Le funzioni

$$x^2 = 1 \text{ e } (x+1)^2 = 2(x+1)$$

hanno per lo stesso argomento sempre lo stesso valore, precisamente il Vero per –1 e +1, il Falso per ogni altro argomento. Per quanto sopra stabilito, diremo che queste funzioni hanno lo stesso decorso di valori e lo esprimeremo in simboli così:

$$’\varepsilon(\varepsilon^2 = 1) = ’\alpha[\alpha+1]^2 = 2[\alpha+1]).$$

In logica si parla di eguaglianza dell'estensione dei concetti. Possiamo pertanto indicare come estensione di un concetto il decorso dei valori di una funzione, il cui valore è per ogni argomento un valore di verità.

Ma non ci fermeremo alle uguaglianze e alle diseguaglianze. La forma discorsiva dell'eguaglianza e della disuguaglianza è quella dell'enunciato assertorio, il cui senso è un pensiero.[16] In generale, questo pensiero è vero o falso, cioè ha in generale un valore di verità, da considerare come significato dell'enunciato, così come 4 è il significato dell'espressione “2+2” o Londra è il significato dell'espressione “capitale dell'Inghilterra”. [17]

Come le uguaglianze e le espressioni analitiche, gli enunciati assertori si possono scomporre in due parti, delle quali una è in sé conclusa, mentre l'altra ha bisogno di essere completata, essendo insatura. Così, per esempio, l'enunciato

“Cesare conquistò la Gallia”

si scompone in “Cesare” e “conquistò la Gallia”. La seconda parte è insatura e contiene un posto vuoto. Solo riempiendo tale posto con un nome proprio o con un'espressione che rappresenta un nome proprio, si produce un senso compiuto. Anche in questo caso chiamo *funzione* il significato della parte insatura. Qui l'argomento è Cesare.

Vediamo realizzarsi qui un ampliamento di ciò che si può considerare un argomento nel secondo senso sopra riferito. Non sono consentiti solo numeri, ma tutti gli oggetti in generale, ivi comprese le persone. Come possibili valori della funzione valgono ancora i valori di verità già introdotti. Ma dobbiamo spingerci oltre e ammettere come valore della funzione qualunque oggetto senza restrizioni. Ad esempio, prendiamo le mosse dall'espressione

“la capitale del regno tedesco”

che fa ovviamente le veci di un nome proprio e significa un oggetto. Scomponiamola ora nelle parti [18]

“la capitale di”

e

“regno tedesco”,

dove conto la forma del genitivo nella prima parte, che così diventa insatura, mentre la seconda è conclusa. In accordo con quanto precede chiamo

“la capitale di x”

espressione di una funzione. Scegliendo come argomento la nazione tedesca, otteniamo come valore della funzione Berlino.

[15] [Corsivo nostro. L'approccio estensionale (*Umfang*) alla logica è quanto rimane di valido del programma scientifico di Frege. N.d.T.]
[16] Contenere un pensiero è la pretesa di un asserto.

Ammettendo senza restrizioni qualunque oggetto come argomento e valore di una funzione, ci si può chiedere cosa intendiamo qui per oggetto. Ritengo impossibile dare una definizione scolastica, perchè qui abbiamo a che fare con qualcosa che, per la sua semplicità, non ammette scomposizione logica. Si può solo accennare a ciò che si intende. Detto in breve: oggetto è tutto ciò che non è funzione e, quindi, non in sé posti vuoti.

Un enunciato assertorio non contiene posti vuoti e pertanto il suo significato va considerato come oggetto. Questo significato è però un valore di verità. Di conseguenza *entrambi i valori di verità sono oggetti*.[17]

Abbiamo già presentato eguaglianze tra decorsi di valori, per esempio:

$$“\text{'}\varepsilon(\varepsilon^2–4\varepsilon) = \text{'}\alpha(\alpha \cdot [\alpha–4])”,$$

che possiamo scomporre in “$\text{'}\varepsilon(\varepsilon^2–4\varepsilon)$” e “$() = \text{'}\alpha(\alpha \cdot [\alpha–4])$”. Quest’ultima parte ha bisogno di essere completata, in quanto a sinistra del segno di eguaglianza reca un posto vuoto. La prima [19] parte “$\text{'}\varepsilon(\varepsilon^2–4\varepsilon)$” è del tutto conclusa in se stessa, quindi significa un oggetto. I decorsi dei valori di una funzione sono oggetti, mentre le funzioni stesse non lo sono. Abbiamo chiamato $\text{'}\varepsilon(\varepsilon^2–4\varepsilon)$ decorso dei valori, ma avremmo potuto anche indicarlo come estensione del concetto radice quadrata di 1. Anche le estensioni dei concetti sono oggetti, mentre i concetti non lo sono.

Dopo aver così esteso il dominio di ciò che può essere considerato come argomento, vanno più precisamente stabiliti i significati dei segni già in uso. Trattando come oggetti solo i numeri interi dell’aritmetica, le lettere *a* e *b* in “*a*+*b*” potevano alludere solo a numeri interi e occorreva chiarire il [significato del] segno + solo nel contesto dei numeri interi. Ogni estensione della gamma di oggetti indicati con “*a*” e “*b*” rende necessaria la ridefinizione del segno +. L’imperativo del rigore scientifico si manifesta nelle precauzioni da prendere affinché un’espressione non perda mai di significato né si calcoli mai, magari senza saperlo, con segni vuoti, convinti di avere a che fare con oggetti. In passato si sono fatte brutte esperienze con le serie divergenti. È perciò necessario introdurre convenzioni dalle quali risulti, per esempio, cosa significhi

“⊙ + 1”,

nel caso in cui ⊙ significhi il sole. È relativamente indifferente come queste convenzioni vengano fatte. L’essenziale è farle [20] e che “*a*+*b*” abbia sempre un [solo] significato, quale che sia il segno per un determinato oggetto, messo al posto di “*a*” e di “*b*”. Per quanto riguarda i concetti, abbiamo richiesto che per ogni argomento abbiano come valore un valore di verità e per ogni oggetto si determini se esso cade sotto il concetto oppure no.[18] In altre parole, per i concetti formuliamo la richiesta della netta delimitazione. Ove questa richiesta non fosse soddisfatta, non sarebbe possibile formulare leggi logiche su concetti. Per ogni argomento *x*, per il quale “*x*+1” fosse priva di significato, anche la funzione $x+1 = 10$ non avrebbe alcun valore, quindi alcun valore di verità, e il concetto

ciò che aumentato di 1 dà 10

[17] [Corsivo nostro. Sottolineato per il lacanismo di scuola che sostiene la fuorclusione della verità da parte del discorso scientifico. In Frege il Vero è addirittura l’oggetto della logica. N.d.T.]

[18] [Qui Frege presuppone che ogni concetto operi con oggetti categorici e sia esso stesso categoricamente definito. Esistono “concetti” che operano con oggetti tanto estesi che di loro non si può dire se appartengano all’estensione di un concetto. Bisogna aspettare ancora una dozzina di anni prima che Oskar Veblen introduca la nozione di “non categoricità”, che indebolisce la richiesta cartesiana, che Frege fa sua, delle idee “chiare e distinte”. La teoria matematica delle categorie tratta questi oggetti “grandi”. N.d.T.]

non avrebbe confini netti. La richiesta della netta delimitazione dei concetti porta con sé quella delle funzioni in generale, le quali per ogni argomento devono avere un valore.[19]

Finora abbiamo trattato i valori di verità solo come valori di una funzione, non come argomenti. Dopo quanto detto, una funzione deve avere un valore anche quando come argomento si scelga un valore di verità. A tal fine si può stipulare una convenzione intorno ai segni in uso senza precisare troppo quel che viene determinato. Ma ora siamo interessati a trattare alcune funzioni, il cui argomento è un valore di verità. [21]

Introduco una funzione del genere con la notazione

—— x,

stabilendo che il valore di questa funzione sia il Vero, quando l'argomento è il Vero, mentre in tutti gli altri casi – quando l'argomento è il Falso o quando non è un valore di verità – il valore di questa funzione sia il falso.[20] Per esempio, il valore di

—— $1+3 = 4$

è il Vero, mentre il valore di

—— $1+3 = 5$

o di

—— 4

è il Falso. Quindi, questa funzione ha come valore l'argomento stesso, quando questi sia un valore di verità. In precedenza, ho chiamato questo tratto orizzontale "segno di contenuto" – un nome che ora non mi sembra più adeguato.[21] D'ora in poi lo chiamerò semplicemente "l'orizzontale".

Scrivendo uguaglianze o diseguaglianze, per esempio 5 > 4, di solito si vuole esprimere anche un giudizio. In questo caso si vuole asserire che 5 è maggiore di 4. Secondo la concezione da me precedentemente esposta, in "5 > 4" o "1+3 = 5"si hanno solo espressioni di valori di verità, senza che si debba asserire qualcosa. Questa distinzione tra il giudicare e ciò su cui si giudica mi sembra imprescindibile, altrimenti non si potrebbe esprimere una semplice assunzione, ponendo un caso senza pregiudicare se si verifica o no. [22] Abbiamo allora bisogno di un segno particolare per poter affermare qualcosa. Io mi servo di un tratto verticale alla sinistra dell'orizzontale [e lo chiamo "segno di giudizio". Vedi Nota 20]. In questo modo con

"|—— 2+3 = 5"

affermo che 2+3 è uguale a 5. Non viene semplicemente scritto un valore di verità come in "2+3 = 5", ma si dice contemporaneamente che è il Vero.[22]

La prossima funzione può essere semplicemente quella il cui valore è il Falso per quegli argomenti per cui il valore di —— x è il Vero e, viceversa, il cui valore è il Vero per quegli argomenti per cui il valore di —— x è il Falso. La indico così:

—┬— x,

[19] [Frege non tratta funzioni parziali ma solo funzioni totali. Non rientra nel suo programma una teoria della computabilità, la quale deve necessariamente affrontare il caso di funzioni che non restituiscono alcun valore per certi argomenti. N.d.T.]

[20] [Siamo nel contesto della definizione semantica della verità come corrispondenza tra metalinguaggio, dove si definisce la funzione ——, e linguaggio, dove si trova l'argomento della funzione come valore di verità. "La neve è bianca" se e solo se la neve è bianca, come nel classico esempio di Tarski. Proprio Tarski, quarant'anni dopo, dimostrerà che il predicato "verità" —— non è definibile, pena l'incoerenza. Frege ha sentore di ciò. Vedi nota 22. N.d.T.]

[21] [Cfr. G. Frege, *Ideografia* (1878), in Id., *Logica e aritmetica*, a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino 1965, p. 110. N.d.T.]

[22] Il segno di giudizio non può essere usato per formare l'espressione di una funzione, perché non serve insieme ad altri segni a designare un oggetto. "|—— 2+3 = 5" non designa niente ma afferma qualcosa.

e chiamo il trattino verticale “segno di negazione”. La considero una funzione che ha come argomento —— x,

$$(-\!\!\top\!\!- x) = (-\!\!\top\!\!-\ [\overline{}\, x]),$$

pensando fusi i due orizzontali. È però anche [23]

$$(\overline{}[-\!\!\top\!\!- x]) = (-\!\!\top\!\!- x),$$

dato che il valore di $-\!\!\top\!\!- x$ è sempre un valore di verità. Considero, dunque, i due tratti orizzontali a sinistra e a destra del tratto verticale come un orizzontale nel senso particolare sopra definito. Pertanto,

$$\text{“} -\!\!\top\!\!- 2^2 = 5 \text{”}$$

significa il Vero e possiamo premettere il segno del giudizio

$$\vdash\!\!\top\!\!- 2^2 = 5.$$

In questo modo asseriamo che $2^2 = 5$ non è il Vero, cioè che 2^2 non è 5. Anche

$$-\!\!\top\!\!- 2$$

è però il Vero, dato che —— 2 è il Falso. Quindi

$$\vdash\!\!\top\!\!- 2$$

significa che 2 non è il Vero.

Il mio modo di rappresentare la generalità si riconosce nel modo migliore su un esempio. Si debba esprimere il fatto che ogni oggetto è uguale a se stesso. In

$$x = x$$

abbiamo una funzione, il cui argomento è indicato da “*x*”. Va ora detto che il valore di questa funzione è sempre il Vero per qualunque argomento. Con

$$\text{“} -\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- f(\mathfrak{a}) \text{”}$$

indico il Vero, se la funzione $f(x)$ ha sempre il valore Vero per qualsiasi argomento; in tutti gli altri casi [24]

$$\text{“} -\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- f(\mathfrak{a}) \text{”}$$

deve significare il falso. Per la nostra funzione $x = x$ abbiamo il primo caso. Quindi

$$-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

è il Vero e quindi scriviamo:

$$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

Nel nostro senso i tratti orizzontali a destra e a sinistra della cavità vanno intesi come orizzontali. Invece di “$\mathfrak{a}$” avrei potuto scegliere qualunque altra lettera tedesca, ad eccezione delle *f* minuscola e maiuscola, che devono servire a indicare le funzioni.

Con questa notazione è possibile negare la generalità come nel caso

$$-\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- \mathfrak{a}^2 = 1.$$

Infatti,

$$——\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- \mathfrak{a}^2 = 1$$

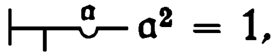
è il falso, perché non per ogni argomento il valore della funzione $x^2 = 1$ è il Vero. Infatti, per l’argomento 2 otteniamo 22 = 1, che è il Falso. Pertanto

$$——\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- \mathfrak{a}^2 = 1$$

è il Falso e

$$-\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- \mathfrak{a}^2 = 1$$

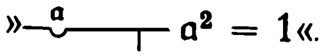
è il Vero, per quanto convenuto a proposito del segno di negazione. Abbiamo quindi



cioè, “non ogni oggetto è la radice quadrata di 1” o “esistono oggetti che non sono la radice quadrata di 1”.

È possibile esprimere anche [25] l’esistenza di radici quadrate di 1? Certo! Basta solo prendere, invece della funzione $x^2 = 1$, la funzione $\top x^2 = 1$. Da

per fusione degli orizzontali otteniamo



Questo significa il falso, perché non per ogni argomento il valore della funzione

$\top x^2 = 1$

è il Vero. Per esempio.

$\top 1^2 = 1$

è il Falso, perché $1^2 = 1$ è il vero. Quindi, poiché

è il Falso, allora

è il Vero:

cioè “ non ogni argomento il valore della funzione $\top x^2 = 1$ è il Vero” o “non per ogni argomento il valore della funzione $x^2 = 1$ è il Falso” o “esiste almeno una radice quadrata di 1”.

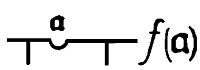
Seguono ancora alcuni esempi a parole e in formule

“esiste almeno un numero positivo”; [26]

“esiste almeno un numero negativo”;

“esiste almeno una radice dell’equazione $x^3 – 3x^2 + 2x = 0$”.

Da questi esempi si vede come si possano esprimere gli importanti enunciati esistenziali. Se indichiamo indeterminatamente un concetto con la lettera *f* in



abbiamo la forma [generale] contenuta negli esempi precedenti, eccetto il segno di giudizio. Le espressioni

» $\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\!-\!\!\top\ \mathfrak{a}^2 = 1$ «, » $\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\!-\!\!\top\ \mathfrak{a} \geqq 0$ «,

» $\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\!-\!\!\top\ \mathfrak{a} \angle 0$ «,

si ottengono da quella forma allo stesso modo in cui, per esempio, da x^2 si ottengono "1^2", "2^2", "3^2". Così come in x^2 abbiamo una funzione il cui argomento è indicato da "x", allo stesso modo considero

$$»\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\!-\!\!\top f(\mathfrak{a})«$$

come espressione di una funzione, il cui argomento è [a sua volta la funzione] *f*. Chiaramente tale funzione differisce in modo fondamentale da quelle finora trattate. Infatti, come suo argomento può comparire solo una funzione. Come le funzioni sono fondamentalmente diverse dagli oggetti, [in quanto le funzioni sono insature, mentre gli oggetti no,] così le funzioni, i cui argomenti sono funzioni, sono e devono essere fondamentalmente diverse dalle funzioni i cui argomenti sono e non possono essere [27] altro che oggetti. Queste le chiamo funzioni di primo livello, quelle di secondo. Analogamente distinguo concetti di primo e di secondo livello.[23] In verità, da tempo in analisi si conoscono funzioni di secondo livello, come ad esempio l'integrale definito, considerando come argomento la funzione integranda.

Si può aggiungere ancora qualcosa sulle funzioni a due argomenti. Otteniamo l'espressione di una funzione componendo il segno complesso di un oggetto in una parte satura e in parte insatura. Per esempio, scomponiamo il segno del Vero

"$3 > 2$"

in "3" e "$x > 2$". Possiamo ulteriormente scomporre la parte insatura "$x > 2$" in "2" e

"$x > y$,

dove ora "y" rende riconoscibile il posto vuoto, precedentemente riempito da "2". In

"$x > y$"

abbiamo una funzione a due argomenti, uno indicato con "x", l'altro con "y", e in

$3 > 2$

abbiamo il valore di questa funzione per gli argomenti 3 e 2. [28] In questo caso abbiamo una funzione il cui valore è costantemente un valore di verità. Funzioni del genere a un solo argomento, le abbiamo chiamate *concetti*. Quelle con due argomenti [e valore che è sempre un valore di verità] le chiamiamo *relazioni*. Sono relazioni, per esempio,

$$x^2 + y^2 = 9$$

e

$$x^2 + y^2 > 9,$$

mentre la funzione

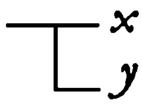
$$x^2 + y^2$$

ha come valori dei numeri. Pertanto non la chiameremo relazione.

Ora si può introdurre una funzione non aritmetica.

---

[23] Cfr. i miei *Fondamenti dell'aritmetica* (Breslau 1884) dove alla fine parlo di "secondo ordine" al posto di "secondo livello". La prova ontologica dell'esistenza di dio soffre per l'errore di trattare l'esistenza come un concetto di primo livello. [L'osservazione di Frege è di stampo kantiano. N.d.T.]



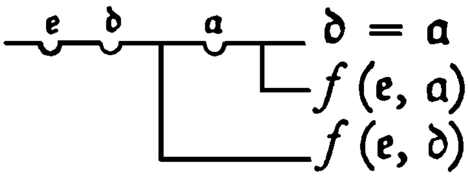
Il valore della funzione sia il Falso, quando come valore dell'argomento *y* si prenda il Falso e come valore dell'argomento *x* si prenda un oggetto; in tutti gli altri casi il valore di questa funzione sia il Vero.[24] Il segno orizzontale sottostante e le due parti in cui la parte superiore è decomposta dal segno verticale sono da considerare degli orizzontali. In conseguenza i valori di questa funzione possono sempre considerarsi —— *x* e —— *y*, cioè dei valori di verità.

Tra le funzioni a un argomento distinguiamo quelle di primo e di secondo livello. Qui è possibile una maggiore varietà. Una funzione a due argomenti può rispetto ad essi essere dello stesso livello o di livelli diversi [29]: funzioni di pari livello e funzioni di non pari livello. Quelle finora trattate erano funzioni di pari livello. Un esempio di funzione di non pari livello è, per esempio, il quoziente differenziale, quando come argomenti vengano presi la funzione da differenziare e l'argomento rispetto al quale va differenziata, o l'integrale definito, quando come argomenti si prendano la funzione integrando e il limite superiore di integrazione. Le funzioni di pari livello possono di nuovo ripartite in funzioni di primo e di secondo livello. Una funzione di secondo livello è, per esempio,

$$F(f[1]),$$

dove "*F*" e "*f*" indicano gli argomenti.

Tra le funzioni di secondo livello a un argomento bisogna distinguere a seconda che l'argomento sia una funzione con uno o due argomenti. Infatti, una funzione a un argomento differisce essenzialmente da una a due, tanto che una non può apparire come argomento proprio nello stesso posto dove compare l'altra. Alcune funzioni di secondo livello a un argomento richiedono una funzione a un argomento, altre una funzione a due argomenti e le due classi sono nettamente separate.



È un esempio di funzione di secondo livello a un argomento, [30] che richiede una funzione a due argomenti.[25] In questo caso la lettera *f* indica l'argomento e i due posti separati dalla virgola nelle parentesi che seguono *f* indicano che *f* rappresenta una funzione a due argomenti.

Considerando le funzioni a due argomenti, la varietà è ancora maggiore.

Se ora riconsideriamo lo sviluppo dell'aritmetica, riconosciamo un progredire a gradini. In un primo tempo si calcola con i singoli numeri, con l'1, il 3 ecc.

$$2 + 3 = 5,\ 2 \cdot 3 = 6$$

sono teoremi di questo tipo. Si passò poi a leggi più generali, che valgono per tutti i numeri. Nella notazione ciò corrisponde al passaggio al calcolo letterale.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

[24] [Qui Frege formalizza l'*implicazione materiale* nell'accezione di Filone di Megara. Oggi questa funzione si scrive $x \rightarrow y$, convenendo che sia falsa se *x* è vero e *y* falso e vera in tutti gli altri casi. L'implicazione materiale è la forma di implicazione più debole che rende vero il *modus ponens*, regola deduttiva dell'ideografia fregeana. N.d.T.]

[25] [Probabilmente l'esempio si riferisce alle funzioni uniformemente continue. N.d.T.]

è un teorema di questo tipo. In questo modo si era giunti a trattare alcune singole funzioni, senza ancora usare la parola in senso matematico e averne afferrato il significato. Il gradino successivo fu il riconoscimento delle leggi generali delle funzioni. Allora fu coniato il termine tecnico di "funzione". Nella notazione ciò corrisponde alla introduzione di alcune lettere come f, F per indicare funzioni in modo generico.

$$\frac{d(f(x) \cdot F(x))}{dx} = F(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} + f(x) \cdot \frac{dF(x)}{dx}$$

è un teorema di questo livello. A questo stadio si conoscevano solo alcune funzioni di secondo livello [31] senza riconoscerle come tali e chiamarle così come abbiamo fatto noi.[26] Dopo questo, si fa il passo successivo. Si potrebbe pensare di andare oltre.[27] Probabilmente quest'ultimo passo non è così fecondo come i precedenti, dato che, come ho mostrato altrove, al posto delle funzioni di secondo livello si possono usare quelle di primo. Con ciò non decade la differenza tra funzioni di primo e secondo livello, che non è arbitraria, ma fondata sulla natura della cosa.

Al posto delle funzioni a due argomenti si possono considerare quelle a singolo argomento ma complesso, ferma restando la differenza tra funzioni a uno e a due argomenti.

---

[26] [Frege delinea bene il lavoro del matematico come lavoro con e attraverso l'ignoranza. N.d.T.]

[27] [Per il passo successivo bisogna aspettare mezzo secolo la comparsa della teoria delle categorie. N.d.T.]