GOTTLOB FREGE

Funktion, Begriff, Bedeutung

Fünf logische Studien

Herausgegeben und eingeleitet
von Günther Patzig

7., bibliographisch ergänzte Auflage

V&R

VANDENHOECK & RUPRECHT
IN GÖTTINGEN

FUNKTION UND BEGRIFF [*]

(Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9. 1. 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft)

Vor längerer Zeit[1]) hatte ich die Ehre, in dieser Gesellschaft 1
über das Ganze von Bezeichnungen vorzutragen, das ich Begriffsschrift genannt habe. Heute möchte ich nun diese Sache von einer anderen Seite her beleuchten und einige Ergänzungen und neue Fassungen mitteilen, deren Notwendigkeit sich mir seitdem ergeben hat. Es kann sich dabei nicht um eine vollständige Darlegung meiner Begriffsschrift, sondern nur darum handeln, einige Grundgedanken ins Licht zu setzen.

Ich gehe von dem aus, was in der Mathematik Funktion genannt wird. Dieses Wort hat nicht gleich anfangs eine so weite Bedeutung gehabt, als es später erlangt hat. Es wird gut sein, unsere Betrachtung bei der ursprünglichen Gebrauchsweise zu beginnen und erst dann die späteren Erweiterungen ins Auge zu fassen. Ich will zunächst nur von Funktionen eines einzigen Arguments sprechen. Ein wissenschaftlicher Ausdruck erscheint da zuerst in seiner ausgeprägten Bedeutung, wo man seiner zum
Aussprechen einer Gesetzmäßigkeit bedarf. Dieser Fall trat für 2
die Funktion ein bei der Entdeckung der höheren Analysis. Da zuerst handelte es sich darum, Gesetze aufzustellen, die von Funktionen im Allgemeinen gelten. In die Zeit der Entdeckung der höheren Analysis ist also zurückzugehen, wenn man wissen will, was zuerst in der Mathematik unter dem Worte »Funktion« verstanden wurde. Auf diese Frage erhält man wohl als Antwort: »unter einer Funktion von x wurde verstanden ein Rechnungsausdruck, der x enthält, eine Formel, die den Buchstaben x einschließt«. Danach würde z. B. der Ausdruck

$$2 \cdot x^3 + x$$

* [Die Texte Freges sind der heutigen Rechtschreibung ohne Pedanterie angeglichen, offenbare Versehen und Druckfehler stillschweigend verbessert. Die Originalpaginierung ist am Rand beigegeben. Zusätze des Hrsg.s in eckigen Klammern.]

[1]) Am 10. Januar 1879 und am 27. Januar 1882.

eine Funktion von x,

$$2 \cdot 2^3 + 2$$

eine Funktion von 2 sein. Diese Antwort kann nicht befriedigen, weil dabei Form und Inhalt, Zeichen und Bezeichnetes nicht unterschieden werden, ein Fehler, dem man freilich jetzt in mathematischen Schriften, selbst von namhaften Verfassern, sehr oft begegnet. Ich habe schon früher[2]) auf die Mängel der gangbaren formalen Theorien in der Arithmetik hingewiesen. Man spricht da von Zeichen, die keinen Inhalt haben, noch haben sollen, legt ihnen dann aber doch Eigenschaften bei, die nur einem Inhalte des Zeichens vernünftigerweise zukommen können. So auch hier: ein bloßer Ausdruck, die Form für einen Inhalt kann das Wesen der Sache nicht sein, sondern nur der
3 Inhalt selbst. Was ist nun der Inhalt, die Bedeutung von »$2 \cdot 2^3 + 2$«? Dieselbe wie von »18« oder von »$3 \cdot 6$«. In der Gleichung $2 \cdot 2^3 + 2 = 18$ wird ausgedrückt, daß die Bedeutung der rechtsstehenden Zeichenverbindung dieselbe sei wie die der linksstehenden. Ich muß hier der Ansicht entgegentreten, daß z. B. $2 + 5$ und $3 + 4$ zwar gleich, aber nicht dasselbe seien. Es liegt dieser Meinung wieder jene Verwechslung von Form und Inhalt, von Zeichen und Bezeichnetem zugrunde. Es ist ebenso, als ob man das wohlriechende Veilchen als verschieden von Viola odorata ansehen wollte, weil die Namen verschieden klingen. Die Verschiedenheit der Bezeichnung kann allein nicht hinreichen, eine Verschiedenheit des Bezeichneten zu begründen. Hier ist die Sache nur dadurch weniger durchsichtig, daß die Bedeutung des Zahlzeichens 7 nichts sinnlich Wahrnehmbares ist. Die jetzt sehr verbreitete Neigung, nichts als Gegenstand anzuerkennen, was nicht mit den Sinnen wahrgenommen werden kann, verleitet dann dazu, die Zahlzeichen selbst für die Zahlen, für die eigentlichen Gegenstände der Betrachtung zu halten[3]); und dann wären ja freilich 7 und $2 + 5$

---

[2]) Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884, § 92 u. ff., und Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft, Jahrg. 1885, Sitzung vom 17. Juli.

[3]) Vergleiche die Aufsätze: Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet von *H. v. Helmholtz,* und Über den Zahlbegriff von *Leopold Kronecker.* (Philosophische Aufsätze. *Eduard Zeller* zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet. Leipzig 1887.)

verschieden. Aber eine solche Auffassung ist nicht zu halten,
weil man gar nicht von irgendwelchen arithmetischen Eigen- 4
schaften der Zahlen sprechen kann, ohne auf die Bedeutung
der Zahlzeichen zurückzugehen. Die Eigenschaft der 1 z. B., mit
sich selbst multipliziert sich selbst wieder zu ergeben, wäre
eine reine Erdichtung; keine noch so weit getriebene mikrosko-
pische oder chemische Untersuchung könnte jemals diese Eigen-
schaft an dem unschuldigen Gebilde entdecken, das wir Zahl-
zeichen Eins nennen. Man spricht vielleicht von einer Defini-
tion; aber keine Definition ist in der Weise schöpferisch, daß
sie einem Dinge Eigenschaften verleihen könnte, die es nun
einmal nicht hat, außer der einen, das auszudrücken und zu
bezeichnen, wofür die Definition es als Zeichen einführt[4]). Da-
gegen haben die Gebilde, die wir Zahlzeichen nennen, physi-
kalische und chemische Eigenschaften, die von dem Schreib-
mittel abhängen. Man könnte sich denken, daß einmal ganz
neue Zahlzeichen eingeführt würden, wie die arabischen z. B.
die römischen verdrängt haben. Niemand wird im Ernste an-
nehmen, daß man dadurch ganz neue Zahlen bekäme, ganz
neue Gegenstände der Arithmetik mit bisher noch unerforsch-
ten Eigenschaften. Wenn man also von den Zahlzeichen ihre
Bedeutungen unterscheiden muß, so wird man auch den Aus-
drücken »2«, »1 + 1«, »3 — 1«, »6 : 3« dieselbe Bedeutung zu- 5
erkennen müssen; denn es ist gar nicht abzusehen, worin der
Unterschied bestehen sollte. Man sagt vielleicht: 1 + 1 ist eine
Summe, aber 6 : 3 ein Quotient. Was ist aber 6 : 3? die Zahl,
welche mit 3 multipliziert 6 ergibt. »D i e Zahl«, nicht »eine
Zahl« heißt es; mit dem bestimmten Artikel deutet man an,
daß es nur eine einzige gibt. Nun ist

$$(1+1)+(1+1)+(1+1) = 6,$$

und also ist $(1+1)$ eben die Zahl, welche als $(6:3)$ bezeichnet wurde. Die verschiedenen Ausdrücke entsprechen verschiedenen Auffassungen und Seiten, aber doch immer derselben Sache. Die Gleichung $x^2 = 4$ würde sonst nicht nur die beiden Wurzeln 2 und -2, sondern auch $(1+1)$ und unzählige andere

[4]) Es handelt sich dabei immer darum, mit einem Zeichen einen Sinn oder eine Bedeutung zu verbinden. Wo Sinn und Bedeutung ganz fehlen, kann eigentlich weder von einem Zeichen, noch von einer Definition die Rede sein.

erhalten, die voneinander verschieden, wenn auch in gewisser Hinsicht einander ähnlich wären. Indem man nur zwei reelle Wurzeln anerkennt, verwirft man die Ansicht, das Gleichheitszeichen bedeute kein völliges Zusammenfallen, sondern nur eine teilweise Übereinstimmung. Halten wir daran fest, so sehen wir, daß die Ausdrücke

»$2 \cdot 1^3 + 1$«,
»$2 \cdot 2^3 + 2$«,
»$2 \cdot 4^3 + 4$«

Zahlen bedeuten, nämlich 3, 18, 132. Wenn nun die Funktion wirklich nur Bedeutung eines Rechnungsausdrucks wäre, so wäre sie eben eine Zahl; und etwas Neues hätten wir damit für die Arithmetik nicht gewonnen. Nun pflegt man freilich bei
6 dem Worte »Funktion« an Ausdrücke zu denken, in denen eine Zahl durch den Buchstaben x nur unbestimmt angedeutet ist, wie etwa

»$2 \cdot x^3 + x$«;

aber damit ist nichts geändert; denn dieser Ausdruck deutet dann eine Zahl auch nur unbestimmt an; und ob ich ihn hinschreibe, oder nur »x«, macht keinen wesentlichen Unterschied. Dennoch werden wir eben durch die Schreibung mit dem unbestimmt andeutenden »x« auf die richtige Fassung hingeleitet. Man nennt x das Argument der Funktion und erkennt in

»$2 \cdot 1^3 + 1$«,
»$2 \cdot 4^3 + 4$«,
»$2 \cdot 5^3 + 5$«

dieselbe Funktion wieder, nur mit verschiedenen Argumenten, nämlich 1, 4 und 5. Daraus ist zu ersehen, daß in dem Gemeinsamen jener Ausdrücke das eigentliche Wesen der Funktion liegt; d. h. also in dem, was in

»$2 \cdot x^3 + x$«

noch außer dem »x« vorhanden ist, was wir etwa so schreiben könnten

»$2 \cdot (\;)^3 + (\;)$«.

Es kommt mir darauf an, zu zeigen, daß das Argument nicht mit zur Funktion gehört, sondern mit der Funktion zusammen ein vollständiges Ganzes bildet; denn die Funktion für sich

allein ist unvollständig, ergänzungsbedürftig oder ungesättigt
zu nennen. Und dadurch unterscheiden sich die Funktionen von
den Zahlen von Grund aus. Und aus diesem Wesen der Funk-
tion erklärt es sich, daß wir einerseits in »$2 \cdot 1^3+1$« und 7
»$2 \cdot 2^3+2$« dieselbe Funktion erkennen, obwohl diese Aus-
drücke verschiedene Zahlen bedeuten, während wir anderer-
seits in »$2 \cdot 1^3+1$« und »$4-1$« trotz des gleichen Zahlen-
wertes nicht dieselbe Funktion wiederfinden. Wir sehen nun
auch, wie leicht man dazu verführt wird, gerade in der Form
des Ausdrucks das Wesentliche der Funktion zu sehen. In dem
Ausdruck erkennen wir die Funktion dadurch, daß wir ihn
zerlegt denken; und eine solche mögliche Zerlegung wird durch
seine Bildung nahe gelegt.

Die beiden Teile, in welche der Rechnungsausdruck so zerlegt wird, das Zeichen des Arguments und der Ausdruck der Funktion sind ungleichartig, da ja das Argument eine Zahl, ein in sich abgeschlossenes Ganzes ist, was die Funktion nicht ist. Man kann dies vergleichen mit der Teilung einer Strecke durch einen Punkt. Man ist dann geneigt, den Teilungspunkt zu beiden Teilstrecken zu rechnen. Wenn man aber die Teilung rein vornehmen will, nämlich so, daß nichts doppelt gerechnet wird und nichts ausfällt, so darf man den Teilpunkt nur zu der einen Teilstrecke rechnen. Diese wird dadurch völlig in sich abgeschlossen und ist dem Argumente zu vergleichen, während der anderen etwas fehlt. Der Teilpunkt nämlich, den man ihren Endpunkt nennen könnte, gehört nicht zu ihr. Erst dadurch, daß man sie durch diesen Endpunkt oder eine Strecke mit zwei Endpunkten ergänzt, erhält man aus ihr etwas Voll-
ständiges. Wenn ich nun z. B. sage »die Funktion $2 \cdot x^3+x$«,
so ist x nicht als zur Funktion gehörig zu betrachten, sondern 8
dieser Buchstabe dient nur dazu, die Art der Ergänzungsbedürf-
tigkeit anzudeuten, indem er die Stellen kenntlich macht, wo
das Zeichen des Arguments einzutreten hat.

Wir nennen nun das, wozu die Funktion durch ihr Argument ergänzt wird, den Wert der Funktion für dies Argument. So ist z. B. 3 der Wert der Funktion $2 \cdot x^2+x$ für das Argument 1, weil wir haben $2 \cdot 1^2+1 = 3$.

Es gibt Funktionen, wie z. B. $2+x-x$ oder $2+0 \cdot x$, deren Wert immer derselbe ist, was auch ihr Argument sei; wir haben

$2=2+x-x$ und $2=2+0\cdot x$. Wenn man nun das Argument mit zur Funktion rechnete, so würde man die Zahl 2 für diese Funktion halten. Aber dies ist unrichtig. Obwohl hier der Wert der Funktion immer 2 ist, so ist die Funktion selbst doch von 2 zu unterscheiden; denn der Ausdruck einer Funktion muß immer eine oder mehrere Stellen aufweisen, welche zur Ausfüllung durch das Zeichen des Arguments bestimmt sind.
Die Methode der analytischen Geometrie bietet nun ein Mittel, uns die Werte einer Funktion für verschiedene Argumente anschaulich zu machen. Indem wir nämlich das Argument als Zahlenwert einer Abszisse und den zugehörigen Wert der Funktion als Zahlenwert der Ordinate eines Punktes betrachten, erhalten wir eine Gesamtheit von Punkten, die sich der Anschauung in den gewöhnlichen Fällen als Kurve darstellt. Jeder Kurvenpunkt entspricht einem Argumente mit dem zugehörigen Funktionswerte.
So gibt z. B.

9 $$y=x^2-4x$$

eine Parabel, wobei »y« den Wert der Funktion und den Zahlenwert der Ordinate ebenso andeutet wie »x« das Argument und den Zahlenwert der Abszisse. Vergleichen wir hiermit die Funktion

$$x(x-4),$$

so finden wir, daß sie allgemein für dasselbe Argument denselben Wert hat wie jene. Wir haben allgemein

$$x^2-4x = x(x-4),$$

welche Zahl auch für x genommen werde. Daher ist die Kurve, die wir aus

$$y = x^2-4x$$

erhalten, dieselbe wie die aus

$$y = x(x-4)$$

hervorgehende. Ich spreche das so aus: die Funktion $x(x-4)$ hat denselben Wertverlauf wie die Funktion x^2-4x.
Wenn wir schreiben

$$x^2-4x = x(x-4),$$

so haben wir nicht eine Funktion der anderen, sondern nur die Funktionswerte einander gleichgesetzt. Und wenn wir diese

Gleichung so verstehen, daß sie gelten soll, was für ein Argument auch für x eingesetzt werden möge, so haben wir damit die Allgemeinheit einer Gleichung ausgedrückt. Wir können dafür aber auch sagen »der Wertverlauf der Funktion $x(x—4)$ ist gleich dem der Funktion $x^2—4x$« und haben darin eine 10
Gleichung zwischen Wertverläufen. Daß es nun möglich ist, die Allgemeinheit einer Gleichung zwischen Funktionswerten als eine Gleichung aufzufassen, nämlich als eine Gleichung zwischen Wertverläufen, ist, wie mir scheint, nicht zu beweisen, sondern muß als logisches Grundgesetz angesehen werden[5]).
Es mag nun auch eine kurze Bezeichnungsweise für den Wertverlauf einer Funktion eingeführt werden. Zu dem Zwecke ersetze ich das Zeichen des Arguments in dem Ausdrucke der Function durch ein griechisches Vokalzeichen, schließe das Ganze in Klammern ein und schicke ihm denselben griechischen Buchstaben mit einem Spiritus lenis vorher. Danach ist z. B.

$$\text{ἐ}(\varepsilon^2—4\varepsilon)$$

der Wertverlauf der Funktion $x^2—4x$ und

$$\text{ἀ}(\alpha \cdot [\alpha—4])$$

der Wertverlauf der Funktion $x(x—4)$, so daß wir in

$$»\text{ἐ}(\varepsilon^2—4\varepsilon) = \text{ἀ}(\alpha \cdot [\alpha—4])«$$

den Ausdruck dafür haben, daß der erste Wertverlauf derselbe wie der zweite ist. Die griechischen Buchstaben sind absichtlich verschieden gewählt, um anzudeuten, daß nichts dazu nötigt, denselben zu nehmen.

$$»x^2—4x = x(x—4)«$$ 11

drückt zwar denselben Sinn aus, wenn wir es wie oben verstehen, aber in anderer Weise. Es stellt den Sinn dar als Allgemeinheit einer Gleichung, während der neu eingeführte Ausdruck einfach eine Gleichung ist, deren rechte Seite sowohl wie die linke eine in sich abgeschlossene Bedeutung hat. In

$$»x^2—4x = x(x—4)«$$

[5]) In manchen Wendungen der üblichen mathematischen Ausdrucksweise entspricht wohl das Wort »Funktion« dem, was ich hier Wertverlauf einer Funktion genannt habe. Aber Funktion in dem hier gebrauchten Sinne des Wortes ist das logisch Frühere.

deutet die linke Seite, allein betrachtet, nur unbestimmt eine Zahl an und ebenso die rechte Seite. Wenn wir bloß »$x^2-4\,x$« hätten, so könnten wir dafür auch »$y^2-4\,y$« schreiben, ohne den Sinn zu ändern; denn »y« deutet ebenso wie »x« nur unbestimmt eine Zahl an. Wenn wir aber beide Seiten zu einer Gleichung vereinigen, so müssen wir beiderseits denselben Buchstaben wählen und drücken dadurch etwas aus, was weder die linke Seite für sich, noch die rechte Seite, noch das Gleichheitszeichen enthält, nämlich eben die Allgemeinheit, freilich die Allgemeinheit einer Gleichung, aber doch in erster Linie eine Allgemeinheit.

Wie man eine Zahl unbestimmt durch einen Buchstaben andeutet, um Allgemeinheit auszudrücken, hat man auch das Bedürfnis, eine Funktion unbestimmt durch Buchstaben anzudeuten. Man bedient sich dazu meistens der Buchstaben f und F in der Weise, daß in »$f(x)$« und »$F(x)$« x das Argument vertritt. Hier kommt die Ergänzungsbedürftigkeit der Funktion dadurch zum Ausdruck, daß der Buchstabe f oder F eine Klam-
12 mer mit sich führt, deren Innenraum zur Aufnahme des Argumentzeichens bestimmt ist. Danach deutet

»ἐ f (ε)«

den Wertverlauf einer Funktion an, die unbestimmt gelassen ist.

Wie ist nun die Bedeutung des Wortes Funktion beim Fortschreiten der Wissenschaft erweitert worden? Man kann dabei zwei Richtungen unterscheiden.

Erstens nämlich ist der Kreis der Rechnungsarten erweitert worden, die zur Bildung einer Funktion beitragen. Zu der Addition, Multiplikation, Potenzierung und deren Umkehrungen sind die verschiedenen Arten des Grenzüberganges hinzugekommen, ohne daß man allerdings immer ein klares Bewußtsein von dem wesentlich Neuen hatte, das damit aufgenommen werde. Man ist weiter gegangen und sogar genötigt worden, zu der Wortsprache seine Zuflucht zu nehmen, da die Zeichensprache der Analysis versagte, wenn z. B. von einer Funktion die Rede war, deren Wert für rationale Argumente 1, für irrationale 0 ist.

Zweitens ist der Kreis dessen erweitert worden, was als Argument und Funktionswert auftreten kann, durch Aufnahme der komplexen Zahlen. Hiermit mußte zugleich der Sinn der Ausdrücke »Summe«, »Produkt« usw. weiter bestimmt werden.

In beiden Richtungen gehe ich nun weiter. Zunächst nehme ich
zu den Zeichen $+$, $-$ usw., die zur Bildung eines Funktions-
ausdruckes dienen, noch hinzu Zeichen wie $=$, $>$, $<$, so daß 13
ich z. B. von der Funktion $x^2 = 1$ sprechen kann, wo x wie
früher das Argument vertritt. Die erste Frage, die hier auftaucht, ist die nach den Werten dieser Funktion für verschiedene Argumente. Setzen wir einmal der Reihe nach für x -1, 0, 1, 2, so erhalten wir

$$(-1)^2 = 1,$$
$$0^2 = 1,$$
$$1^2 = 1,$$
$$2^2 = 1.$$

Von diesen Gleichungen sind die erste und dritte wahr, die anderen falsch. Ich sage nun: »der Wert unserer Funktion ist ein Wahrheitswert« und unterscheide den Wahrheitswert des Wahren von dem des Falschen. Den einen nenne ich kurz das Wahre, den andern das Falsche. Hiernach bedeutet z. B. »$2^2 = 4$« das Wahre ebenso, wie etwa »2^2« 4 bedeutet. Und es bedeutet »$2^2 = 1$« das Falsche. Demnach bedeuten

$$»2^2 = 4«, »2 > 1«, »2^4 = 4^2«$$

dasselbe, nämlich das Wahre, so daß wir in

$$(2^2 = 4) = (2 > 1)$$

eine richtige Gleichung haben.

Es liegt hier der Einwand nahe, daß »$2^2 = 4$« und »$2 > 1$«
doch ganz Verschiedenes besagen, ganz verschiedene Gedanken
ausdrücken; aber auch »$2^4 = 4^2$« und »$4 \cdot 4 = 4^2$« drücken ver-
schiedene Gedanken aus; und doch kann man »2^4« durch
»$4 \cdot 4$« ersetzen, weil beide Zeichen dieselbe Bedeutung haben.
Folglich haben auch »$2^4 = 4^2$« und »$4 \cdot 4 = 4^2$« dieselbe Be-
deutung. Man sieht hieraus, daß die Gleichheit der Bedeutung 14
nicht die Gleichheit des Gedankens zur Folge hat. Wenn wir
sagen »der Abendstern ist ein Planet, dessen Umlaufzeit kleiner
ist als die der Erde«, so haben wir einen anderen Gedanken

ausgedrückt als in dem Satze »der Morgenstern ist ein Planet, dessen Umlaufzeit kleiner ist als die der Erde«; denn, wer nicht weiß, daß der Morgenstern der Abendstern ist, könnte den einen für wahr, den andern für falsch halten; und doch muß die Bedeutung beider Sätze dieselbe sein, weil nur die Wörter »Abendstern« und »Morgenstern« mit einander vertauscht sind, welche dieselbe Bedeutung haben, d. h. Eigennamen desselben Himmelskörpers sind. Man muß Sinn und Bedeutung unterscheiden. »2^4« und »$4 \cdot 4$« haben zwar dieselbe Bedeutung; d. h. sie sind Eigennamen derselben Zahl; aber sie haben nicht denselben Sinn; und daher haben »$2^4 = 4^2$« und »$4 \cdot 4 = 4^2$« zwar dieselbe Bedeutung, aber nicht denselben Sinn; d. h. in diesem Falle: sie enthalten nicht denselben Gedanken[6]).

Mit demselben Rechte also, wie wir schreiben

$$»2^4 = 4 \cdot 4«$$

können wir auch schreiben

$$»(2^4 = 4^2) = (4 \cdot 4 = 4^2)«$$

und

$$»(2^2 = 4) = (2 > 1)«$$

Ferner könnte gefragt werden, zu welchem Zwecke denn die Zeichen $=$, $>$, $<$ in den Kreis derer aufgenommen werden, die einen Funktionsausdruck bilden helfen. Es scheint jetzt die Meinung immer mehr Anhänger zu gewinnen, daß die Arithmetik weiter entwickelte Logik ist, daß eine strengere Begründung der arithmetischen Gesetze auf rein logische und nur auf solche zurückführt. Auch ich bin dieser Meinung und gründe darauf die Forderung, daß die arithmetische Zeichensprache zu einer logischen erweitert werden muß. Wie dies in unserem Falle geschieht, wird nun anzudeuten sein.

Wir sahen, daß der Wert unserer Funktion $x^2 = 1$ immer einer der beiden Wahrheitswerte ist. Wenn nun für ein bestimmtes Argument, z. B. -1, der Funktionswert das Wahre ist, so können wir das so ausdrücken: »die Zahl -1 hat die

---

[6]) Ich verkenne nicht, daß diese Wendung zunächst willkürlich und künstlich erscheinen mag und daß eine eingehendere Begründung gefordert werden könnte. Man vergl. meinen nächstens erscheinenden Aufsatz über Sinn und Bedeutung in der Zeitschrift für Philosophie und phil. Kritik. [S. 40—65 dieser Ausgabe. Hrsg.]

Eigenschaft, daß ihr Quadrat 1 ist«, oder kürzer: »—1 ist eine Quadratwurzel aus 1«, oder »—1 fällt unter den Begriff der Quadratwurzel aus 1«. Wenn der Wert der Funktion $x^2 = 1$ für ein Argument, z. B. 2, das Falsche ist, so werden wir das so ausdrücken können: »2 ist nicht Quadratwurzel aus 1« oder »2 fällt nicht unter den Begriff Quadratwurzel aus 1«. Wir sehen daraus, wie eng das, was in der Logik Begriff genannt wird, zusammenhängt mit dem, was wir Funktion nennen. Ja, man wird geradezu sagen können: ein Begriff ist eine Funktion, deren Wert immer ein Wahrheitswert ist. Auch der Wert der Funktion

$$(x+1)^2 = 2\,(x+1)$$

ist immer ein Wahrheitswert. Wir erhalten das Wahre z. B. für 16
das Argument —1 und werden dies auch so aussprechen können: —1 ist eine Zahl, die um 1 kleiner ist als eine Zahl, deren Quadrat ihrem Zweifachen gleich ist. Hiermit ist das Fallen der Zahl —1 unter einen Begriff ausgedrückt. Nun haben die Funktionen

$$x^2 = 1 \text{ und } (x+1)^2 = 2\,(x+1)$$

für dasselbe Argument immer denselben Wert, nämlich für —1 und +1 das Wahre, für alle anderen Argumente das Falsche. Nach dem früher Festgestellten werden wir also sagen, daß diese Funktionen denselben Wertverlauf haben, und dies so in Zeichen ausdrücken:

$$\grave{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 = 1) = \grave{\alpha}\,([\alpha+1]^2 = 2\,[\alpha+1]).$$

In der Logik nennt man dies Gleichheit des Umfanges der Begriffe. Wir können demnach als Begriffsumfang den Wertverlauf einer Funktion bezeichnen, deren Wert für jedes Argument ein Wahrheitswert ist.

Wir werden bei den Gleichungen und Ungleichungen nicht stehen bleiben. Die sprachliche Form der Gleichungen ist ein Behauptungssatz. Ein solcher enthält als Sinn einen Gedanken — oder macht wenigstens Anspruch darauf, einen zu enthalten —; und dieser Gedanke ist im allgemeinen wahr oder falsch; d.h. er hat im allgemeinen einen Wahrheitswert, der ebenso als Bedeutung des Satzes aufzufassen ist, wie etwa die Zahl 4 die Bedeutung des Ausdruckes »2+2« ist, oder wie

London die Bedeutung des Ausdruckes »Englands Hauptstadt« ist.

17 Behauptungssätze im allgemeinen kann man ebenso wie Gleichungen oder analytische Ausdrücke zerlegt denken in zwei Teile, von denen der eine in sich abgeschlossen, der andere ergänzungsbedürftig, ungesättigt ist. So kann man z. B. den Satz

»Caesar eroberte Gallien«

zerlegen in »Caesar« und »eroberte Gallien«. Der zweite Teil ist ungesättigt, führt eine leere Stelle mit sich, und erst dadurch, daß diese Stelle von einem Eigennamen ausgefüllt wird oder von einem Ausdrucke, der einen Eigennamen vertritt, kommt ein abgeschlossener Sinn zum Vorschein. Ich nenne auch hier die Bedeutung dieses ungesättigten Teiles Funktion. In diesem Falle ist das Argument Caesar.

Wir sehen, daß hier zugleich eine Erweiterung in der anderen Richtung vorgenommen ist, nämlich hinsichtlich dessen, was als Argument auftreten kann. Es sind nicht mehr bloß Zahlen zuzulassen, sondern Gegenstände überhaupt, wobei ich allerdings auch Personen zu den Gegenständen rechnen muß. Als mögliche Funktionswerte sind schon vorhin die beiden Wahrheitswerte eingeführt. Wir müssen weiter gehen und Gegenstände ohne Beschränkung als Funktionswerte zulassen. Um hierfür ein Beispiel zu haben, gehen wir etwa aus von dem Ausdrucke

18 »die Hauptstadt des deutschen Reichs«.

Dieser vertritt offenbar einen Eigennamen und bedeutet einen Gegenstand. Zerlegen wir ihn nun in die Teile

»die Hauptstadt des«

und »deutsches Reich«, wobei ich die Form des Genitivs zum ersten Teile rechne, so ist dieser ungesättigt, während der andere in sich abgeschlossen ist. Ich nenne also dem Früheren gemäß

»die Hauptstadt des x«

Ausdruck einer Funktion. Nehmen wir als ihr Argument das deutsche Reich, so erhalten wir als Funktionswert Berlin.

Wenn wir so Gegenstände ohne Einschränkung als Argumente und als Funktionswerte zugelassen haben, so fragt es sich nun, was hier Gegenstand genannt wird. Eine schulgemäße Definition halte ich für unmöglich, weil wir hier etwas haben, was wegen seiner Einfachheit eine logische Zerlegung nicht zuläßt. Es ist nur möglich, auf das hinzudeuten, was gemeint ist. Hier kann nur kurz gesagt werden: Gegenstand ist alles, was nicht Funktion ist, dessen Ausdruck also keine leere Stelle mit sich führt.

Ein Behauptungssatz enthält keine leere Stelle, und darum ist seine Bedeutung als Gegenstand anzusehen. Diese Bedeutung aber ist ein Wahrheitswert. Also sind die beiden Wahrheitswerte Gegenstände.

Wir haben vorhin Gleichungen zwischen Wertverläufen aufgestellt, z. B.

$$»\acute{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 4\,\varepsilon) = \acute{\alpha}\,(\alpha[\alpha - 4])«.$$

Wir können dies zerlegen in »$\acute{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 4\,\varepsilon)$« und »$(\;) = \acute{\alpha}\,(\alpha[\alpha - 4])$«.

Dieser letzte Teil ist ergänzungsbedürftig, indem er links vom Gleichheitszeichen eine leere Stelle mit sich führt. Der erste 19
Teil »$\acute{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 4\,\varepsilon)$« ist völlig in sich abgeschlossen, bedeutet also einen Gegenstand. Wertverläufe von Funktionen sind Gegenstände, während Funktionen selbst es nicht sind. Wir hatten auch $\acute{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 = 1)$ Wertverlauf genannt, konnten es aber auch bezeichnen als Umfang des Begriffes Quadratwurzel aus 1. Auch Begriffsumfänge sind also Gegenstände, obwohl die Begriffe selbst es nicht sind.

Nachdem wir so den Umkreis dessen, was als Argument genommen werden darf, erweitert haben, müssen genauere Festsetzungen über die Bedeutungen der schon gebräuchlichen Zeichen getroffen werden. Solange man von den Gegenständen nur die ganzen Zahlen in der Arithmetik betrachtet, deuten die Buchstaben a und b in »$a+b$« nur ganze Zahlen an, braucht das Pluszeichen nur zwischen ganzen Zahlen erklärt zu werden. Jede Erweiterung des Umkreises der Gegenstände, die durch »a« und »b« angedeutet werden, nötigt zu einer neuen Erklärung des Pluszeichens. Vorkehrungen zu treffen, daß nie ein Ausdruck bedeutungslos werden könne, daß man nie, ohne es zu merken, mit leeren Zeichen rechne in der Meinung, mit Gegenständen zu tun zu haben, erscheint als Gebot der wissenschaftlichen Strenge. Man hat früher mit divergenten unendlichen Reihen üble Erfahrungen gemacht. Es ist also nötig, Festsetzungen zu machen, aus denen hervorgeht, was z. B.

$$»\odot+1«$$

bedeutet, wenn »$\odot$« die Sonne bedeuten soll. Wie diese Fest-
20 setzungen geschehen, ist verhältnismäßig gleichgültig; wesentlich ist aber, daß sie gemacht werden, daß »$a+b$« immer eine Bedeutung erhalte, welche Zeichen bestimmter Gegenstände auch für »a« und »b« eingesetzt werden mögen. Für die Begriffe haben wir hierin die Forderung, daß sie für jedes Argument einen Wahrheitswert als Wert haben, daß für jeden Gegenstand bestimmt sei, ob er unter den Begriff falle oder nicht; mit anderen Worten: wir haben für Begriffe die Forderung ihrer scharfen Begrenzung, ohne deren Erfüllung es unmöglich wäre, logische Gesetze von ihnen aufzustellen. Für jedes Argument x, für das »$x+1$« bedeutungslos wäre, hätte auch die Funktion $x+1 = 10$ keinen Wert, also auch keinen Wahrheitswert, so daß der Begriff,

was um 1 vermehrt 10 ergibt,

keine scharfe Grenze hätte. Die Forderung der scharfen Begrenzung der Begriffe zieht also die für Funktionen im Allgemeinen nach sich, daß sie für jedes Argument einen Wert haben müssen.

Wir haben die Wahrheitswerte bisher nur als Funktionswerte, nicht als Argumente betrachtet. Nach dem eben Gesagten muß eine Funktion auch dann einen Wert erhalten, wenn als Argument ein Wahrheitswert genommen wird; aber eine Festsetzung zu dem Zwecke mag bei den schon üblichen Zeichen meist nur geschehen, damit sie geschehe, ohne daß dabei sehr in Betracht kommt, was bestimmt wird. Es mögen nun aber einige Funktionen betrachtet werden, an denen uns grade dann gelegen ist, wenn ihr Argument ein Wahrheitswert ist.

21 Ich führe als solche ein

$$—\!\!—\!\!— x,$$

indem ich festsetze, daß der Wert dieser Funktion das Wahre sein soll, wenn als Argument das Wahre genommen wird, daß hingegen in allen anderen Fällen der Wert dieser Funktion das

Falsche ist; also sowohl dann, wenn das Argument das Falsche ist, als auch dann, wenn es kein Wahrheitswert ist. Danach ist z. B.

$$——\ 1+3 = 4$$

das Wahre, während sowohl

$$——\ 1+3 = 5$$

als auch

$$——\ 4$$

das Falsche ist. Diese Funktion hat also als Wert das Argument selbst, wenn dieses ein Wahrheitswert ist. Ich habe diesen waagerechten Strich früher Inhaltsstrich genannt, ein Name, der nun nicht mehr passend scheint. Ich will ihn jetzt einfach den Waagerechten nennen.

Wenn man eine Gleichung oder Ungleichung hinschreibt, z. B. $5 > 4$, so will man gewöhnlich damit zugleich ein Urteil ausdrücken; man will in unserem Falle behaupten, 5 sei größer als 4. Nach der von mir hier dargelegten Auffassung hat man in »$5 > 4$« oder »$1+3 = 5$« nur Ausdrücke von Wahrheitswerten, ohne daß damit etwas behauptet werden soll. Diese Trennung des Urteilens von dem, worüber geurteilt wird, erscheint unumgänglich, weil sonst eine bloße Annahme, das
Setzen eines Falles, ohne gleich über sein Eintreten zu urteilen, 22
nicht ausdrückbar wäre. Wir bedürfen also eines besonderen Zeichens, um etwas behaupten zu können. Ich bediene mich hierzu eines senkrechten Striches am linken Ende des Waagerechten, so daß wir z. B. mit

»$\vdash\!\!—\ 2+3 = 5$«

behaupten: $2+3$ ist gleich 5. Es wird also nicht bloß wie in

»$2+3 = 5$«

ein Wahrheitswert hingeschrieben, sondern zugleich auch gesagt, daß er das Wahre sei[7]).

Die nächst einfache Funktion mag die sein, deren Wert gerade für die Argumente das Falsche ist, für welche der Wert von

[7]) Der Urteilsstrich kann nicht zur Bildung eines Funktionsausdrucks gebraucht werden, weil er nicht mit anderen Zeichen zusammen zur Bezeichnung eines Gegenstandes dient. »$\vdash\!\!—\ 2+3 = 5$« bezeichnet nichts, sondern behauptet etwas.

$—\, x$ das Wahre ist, und deren Wert umgekehrt für die Argumente das Wahre ist, für welche der Wert von $—\, x$ das Falsche ist. Ich bezeichne sie so

$$-\!\!\top\!\!-\, x,$$

wobei ich den kleinen senkrechten Strich Verneinungsstrich nenne. Ich fasse diese Funktion auf als eine Funktion mit dem Argumente $—\, x$:

$$(-\!\!\top\!\!-\, x) = (-\!\!\top\!\!-\, [—\, x]),$$

indem ich die beiden waagerechten Striche verschmolzen denke. Es ist aber auch

$$(—\, [-\!\!\top\!\!-\, x]) = (-\!\!\top\!\!-\, x),$$

23 weil der Wert von $-\!\!\top\!\!-\, x$ immer ein Wahrheitswert ist. Ich fasse also in »$-\!\!\top\!\!-\, x$« die beiden Strichteile rechts und links vom Verneinungsstriche als Waagerechte auf in dem vorhin erklärten besonderen Sinne des Wortes. Es bedeutet demnach z. B.

$$»-\!\!\top\!\!-\, 2^2 = 5«$$

das Wahre, und wir können den Urteilsstrich anbringen:

$$\vdash\!\!\top\!\!-\, 2^2 = 5;$$

und damit behaupten wir, daß $2^2 = 5$ nicht das Wahre ist, oder daß 2^2 nicht 5 ist. Es ist aber auch

$$-\!\!\top\!\!-\, 2$$

das Wahre, weil $—\, 2$ das Falsche ist:

$$\vdash\!\!\top\!\!-\, 2;$$

d. h. 2 ist nicht das Wahre.

Wie ich die Allgemeinheit darstelle, wird an einem Beispiele am besten zu erkennen sein. Es solle ausgedrückt werden, daß jeder Gegenstand sich selbst gleich ist. Wir haben in

$$x = x$$

eine Funktion, deren Argument durch »x« angedeutet ist. Es soll nun gesagt werden, daß der Wert dieser Funktion immer das Wahre ist, was man auch als Argument nehmen möge. Ich verstehe nun unter

$$»-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\, f(\mathfrak{a})«$$

das Wahre, wenn die Funktion $f(x)$ als Wert immer das Wahre hat, was auch ihr Argument sein möge; in allen anderen Fällen soll

»$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- f(\mathfrak{a})$« 24

das Falsche bedeuten. Für unsere Funktion $x = x$ haben wir nun den ersten Fall. Es ist also

$$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

das Wahre; und wir schreiben dies so:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Die waagerechten Striche rechts und links von der Höhlung sind als Waagerechte in unserem Sinne aufzufassen. Statt »$\mathfrak{a}$« könnte irgendein anderer deutscher Buchstabe gewählt werden mit Ausnahme derjenigen, die wie $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$ als Funktionsbuchstaben dienen sollen.

Diese Bezeichnungsart gewährt die Möglichkeit, die Allgemeinheit zu verneinen wie in

$$-\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \mathfrak{a}^2 = 1.$$

Es ist nämlich $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \mathfrak{a}^2 = 1$ das Falsche, weil nicht für jedes Argument der Wert der Funktion $x^2 = 1$ das Wahre ist. Wir erhalten nämlich z.B. für das Argument 2 $2^2 = 1$; das ist das Falsche. Ist nun $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \mathfrak{a}^2 = 1$ das Falsche, so ist $-\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \mathfrak{a}^2 = 1$ das Wahre nach dem, was über den Verneinungsstrich oben festgestellt ist. Wir haben also

$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \mathfrak{a}^2 = 1;$$

d. h. »nicht jeder Gegenstand ist Quadratwurzel aus 1«, oder »es gibt Gegenstände, die nicht Quadratwurzeln aus 1 sind«.
Kann man auch ausdrücken, daß es Quadratwurzeln aus 1 25
gebe? Gewiß! Man braucht nur statt der Funktion $x^2 = 1$ die Funktion

$$-\!\top\!- x^2 = 1$$

zu nehmen. Aus

»$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \;-\!\top\!- \mathfrak{a}^2 = 1$«

entsteht durch Verschmelzung der Waagerechten

»$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\!- \mathfrak{a}^2 = 1$«.

Dies bedeutet das Falsche, weil nicht für jedes Argument der Wert der Funktion

$$\neg\, x^2 = 1$$

das Wahre ist. Es ist z. B.

$$\neg\, 1^2 = 1$$

das Falsche, weil $1^2 = 1$ das Wahre ist. Da nun also

$$\forall \mathfrak{a}\, \neg\, \mathfrak{a}^2 = 1$$

das Falsche ist, so ist

$$\neg \forall \mathfrak{a}\, \neg\, \mathfrak{a}^2 = 1$$

das Wahre:

$$\vdash \neg \forall \mathfrak{a}\, \neg\, \mathfrak{a}^2 = 1;$$

d. h. »nicht für jedes Argument wird der Wert der Funktion

$$\neg\, x^2 = 1$$

das Wahre«, oder »nicht für jedes Argument wird der Wert der Funktion $x^2 = 1$ das Falsche«, oder »es gibt mindestens eine Quadratwurzel aus 1«.

Es mögen hier noch einige Beispiele in Zeichen und Worten folgen:

$$\vdash \neg \forall \mathfrak{a}\, \neg\, \mathfrak{a} \geqq 0$$

es gibt mindestens eine positive Zahl;

26 $$\vdash \neg \forall \mathfrak{a}\, \neg\, \mathfrak{a} < 0$$

es gibt mindestens eine negative Zahl;

$$\vdash \neg \forall \mathfrak{a}\, \neg\, \mathfrak{a}^3 - 3\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a} = 0$$

es gibt mindestens eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0.$$

Hieraus ist zu sehen, wie die wichtigen Existentialsätze auszudrücken sind. Deuten wir einen Begriff unbestimmt mit dem Funktionsbuchstaben f an, so haben wir in

$$\neg \forall \mathfrak{a}\, \neg\, f(\mathfrak{a})$$

die Form, in der die letzten Beispiele, abgesehen vom Urteilsstriche, enthalten sind. Die Ausdrücke

»$\neg \forall \mathfrak{a}\, \neg\, \mathfrak{a}^2 = 1$«, »$\neg \forall \mathfrak{a}\, \neg\, \mathfrak{a} \geqq 0$«, »$\neg \forall \mathfrak{a}\, \neg\, \mathfrak{a} < 0$«, »$\neg \forall \mathfrak{a}\, \neg\, \mathfrak{a}^3 - 3\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a} = 0$«

gehen aus dieser Form in ähnlicher Weise hervor, wie z. B. aus x^2 hervorgehen »1^2«, »2^2«, »3^2«. Wie wir nun in x^2 eine Funktion haben, deren Argument durch »x« angedeutet ist, so fasse ich auch

$$»-\!\!\top\!\!-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!\top\!\!-f(\mathfrak{a})«$$

als Ausdruck einer Funktion auf, deren Argument durch »f« angedeutet wird. Eine solche Funktion ist offenbar grundverschieden von den bisher betrachteten; denn als ihr Argument kann nur eine Funktion auftreten. Wie nun Funktionen von Gegenständen grundverschieden sind, so sind auch Funktionen, deren Argumente Funktionen sind und sein müssen, grundverschieden von Funktionen, deren Argumente Gegenstände sind und nichts anderes sein können. Diese nenne ich Funk- 27
tionen erster, jene Funktionen zweiter Stufe. Ebenso unterscheide ich Begriffe erster und zweiter Stufe[8]). Funktionen zweiter Stufe hat man eigentlich in der Analysis längst gehabt, z. B. in den bestimmten Integralen, sofern man die zu integrierende Funktion als Argument betrachtet.

Es mag noch etwas über Funktionen mit zwei Argumenten hinzugefügt werden. Wir erhielten den Ausdruck einer Funktion, indem wir das zusammengesetzte Zeichen eines Gegenstandes zerlegten in einen gesättigten und einen ungesättigten Teil. Wir zerlegen so z. B. das Zeichen

$$»3 > 2«$$

des Wahren in »3« und »$x > 2$«. Wir können den ungesättigten Teil »$x > 2$« weiter in derselben Weise zerlegen in »2« und

$$»x > y«,$$

wo nun »y« die leere Stelle kenntlich macht, welche vorher durch »2« ausgefüllt war. Wir haben in

$$x > y$$

---

[8]) Vergl. meine Grundlagen der Arithmetik (Breslau 1884) § 53 am Ende, wo ich statt »zweiter Stufe« »zweiter Ordnung« gesagt habe. Der ontologische Beweis für das Dasein Gottes leidet an dem Fehler, daß er die Existenz wie einen Begriff erster Stufe behandelt.

eine Funktion mit zwei Argumenten, deren eines durch »x«, deren anderes durch »y« angedeutet ist, und in

$$3 > 2$$

28 haben wir den Wert dieser Funktion für die Argumente 3 und 2. Wir haben hier eine Funktion, deren Wert stets ein Wahrheitswert ist. Solche Funktionen mit einem Argumente haben wir Begriffe genannt; solche mit zwei Argumenten nennen wir Beziehungen. Beziehungen haben wir z. B. auch in

$$x^2 + y^2 = 9$$

und in

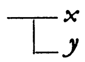
$$x^2 + y^2 > 9,$$

während die Funktion

$$x^2 + y^2$$

als Werte Zahlen hat. Wir werden sie also nicht Beziehung nennen.

Es mag hier eine nicht der Arithmetik eigentümliche Funktion angeführt werden. Der Wert der Funktion



sei dann das Falsche, wenn als y-Argument das Wahre und zugleich als x-Argument ein Gegenstand genommen wird, der nicht das Wahre ist; in allen anderen Fällen sei der Wert dieser Funktion das Wahre. Der untere waagerechte Strich und die beiden Teile, in die der obere durch den senkrechten zerlegt wird, sind als Waagerechte aufzufassen. Demzufolge kann man als Argumente unserer Funktion immer ——x und ——y ansehen, d. h. Wahrheitswerte.

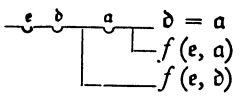
Wir unterschieden unter den Funktionen mit einem Argumente solche erster und zweiter Stufe. Hier ist eine größere Mannigfaltigkeit möglich. Eine Funktion mit zwei Argumenten kann
29 in Beziehung auf diese von derselben oder von verschiedenen Stufen sein: gleichstufige, ungleichstufige Funktionen. Die bisher betrachteten waren gleichstufige. Eine ungleichstufige Funktion ist z. B. der Differentialquotient, wenn als Argumente genommen werden die zu differenzierende Funktion und das Argument, für welches differenziert wird, oder das bestimmte Inte-

gral, sofern als Argumente die zu integrierende Funktion und die obere Grenze genommen werden. Die gleichstufigen Funktionen können wieder in solche erster und zweiter Stufe eingeteilt werden. Eine solche zweiter Stufe ist z. B.

$$F(f[1]),$$

wo »F« und »f« die Argumente andeuten.

Man muß bei den Funktionen zweiter Stufe mit einem Argumente unterscheiden, je nachdem als dies Argument eine Funktion mit einem oder eine solche mit zwei Argumenten erscheinen kann; denn eine Funktion mit einem Argumente ist so wesentlich verschieden von einer solchen mit zwei Argumenten, daß die eine nicht an eben der Stelle als Argument auftreten kann, wo die andere es kann. Einige Funktionen zweiter Stufe mit einem Argumente verlangen als solches eine Funktion mit einem Argumente, andere verlangen eine Funktion mit zwei Argumenten, und diese beiden Klassen sind scharf geschieden.



ist ein Beispiel einer Funktion zweiter Stufe mit einem Argumente, die als solches eine Funktion mit zwei Argumenten verlangt. Der Buchstabe f deutet hierbei das Argument an, und die beiden durch das Komma getrennten Stellen in der auf »f« folgenden Klammer machen bemerklich, daß f eine Funktion mit zwei Argumenten vertritt [*].

Bei den Funktionen mit zwei Argumenten wird die Mannigfaltigkeit noch größer.

Wenn wir von hier auf die Entwicklung der Arithmetik zurückblicken, erkennen wir ein stufenweises Aufsteigen. Zuerst rechnete man mit einzelnen Zahlen, mit der 1, der 3 usw.

$$2+3=5, \quad 2\cdot 3=6$$

---

* [Diese Funktion definiert den Begriff der „eindeutigen Beziehung", einer Beziehung, in der jeder Gegenstand $\mathfrak{e}$ nur zu höchstens einem Gegenstand stehen kann. Vgl. Grundgesetze der Arithmetik I, § 23. Hrsg.]

sind Lehrsätze dieser Art. Man schritt dann zu allgemeineren Gesetzen fort, die von allen Zahlen gelten. In der Bezeichnung entspricht dem der Übergang zur Buchstabenrechnung. In

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

haben wir einen Lehrsatz dieser Art. Damit war man bei der Betrachtung einzelner Funktionen angelangt, ohne noch das Wort im mathematischen Sinne zu gebrauchen und seine Bedeutung erfaßt zu haben. Die nächst höhere Stufe war die Erkenntnis allgemeiner Gesetze von Funktionen und damit die Prägung des Kunstausdruckes »Funktion«. In der Bezeichnung entspricht dem die Einführung von Buchstaben wie f, F zur unbestimmten Andeutung von Funktionen. In

$$\frac{d\,f(x) \cdot F(x)}{dx} = F(x) \cdot \frac{d\,f(x)}{dx} + f(x)\,\frac{d\,F(x)}{dx}$$

31 haben wir einen Lehrsatz dieser Art. Damit hatte man nun einzelne Funktionen zweiter Stufe, ohne jedoch das zu erfassen, was wir Funktion zweiter Stufe genannt haben. Indem man dies tut, macht man den nächsten Fortschritt. Man könnte denken, daß dies so weiter ginge. Wahrscheinlich ist aber schon dieser letzte Schritt nicht so folgenreich wie die früheren, weil man statt der Funktionen zweiter Stufe im weiteren Fortgang Funktionen erster Stufe betrachten kann, wie an einem anderen Orte gezeigt werden soll [*]. Damit ist aber der Unterschied zwischen Funktionen erster und zweiter Stufe nicht aus der Welt geschafft, weil er nicht willkürlich gemacht, sondern in der Natur der Sache tief begründet ist.

Man kann auch statt der Funktionen mit zwei Argumenten Funktionen eines einzigen, aber komplexen Arguments betrachten, wobei jedoch der Unterschied zwischen den Funktionen mit einem und denen mit zwei Argumenten in ganzer Schärfe bestehen bleibt.

---

* [Vgl. Grundgesetze der Arithmetik I, §§ 25, 34—37. Hrsg.]