Sull'infinito e il terzo escluso

La dimostrazione bourbakista del teorema di Cantor, secondo cui la cardinalità dell'insieme delle parti di X, $P(X)$, è superiore alla cardinalità di X, presuppone la validità della tesi logica del terzo escluso (TE).

La dimostrazione che esista un'iniezione tra X e $P(X)$ è banale. Basta porre, per ogni $x \in X$, $x \mapsto \{x\}$.

La dimostrazione che nessuna applicazione f: $x \mapsto P(x)$ sia suriettiva usa il TE.

Sia Y il sottoinsieme di X formato dagli x tali che $x \notin f(x)$. Y esiste certamente e non è vuoto. Infatti, se Y fosse vuoto, per ogni x, si avrebbe $x \in f(x)$. In particolare, per un certo x e un certo y diverso da x, si avrebbe :

$x \mapsto \{x\}$

$x \mapsto \{x, y\}$

e f non sarebbe un'applicazione. (Rammento che un'applicazione è una relazione univoca a destra).

Si danno, allora, due casi:

a) $x \in Y$. Allora $x \notin f(x)$ e $Y \neq f(x)$.

b) $x \notin Y$. Allora $x \in f(x)$ e $Y \neq f(x)$.

Per la logica che ammette TE oltre i due suddetti non esistono altri casi. Si dimostra così che, in ogni caso, esiste un sottoinsieme Y di X che non è raggiunto da nessuna applicazione di X in $P(X)$.

Non conosco una dimostrazione del teorema di Cantor che non sfrutti TE. Conosco solo delle formulazioni che nascondono il TE dietro l'argomento diagonale, che non è altro che una sua variante infinitaria. Cito quella di Claude Berge: "Non può esistere un elemento $c \in A$ tale che $A_c = Y$ perché Y differisce da A_c almeno per l'elemento c. Pertanto Y non compare nella tavola della corrispondenza biunivoca" (C. Berge, *Espaces topologiques. Fonctions multivoques*, Dunod, Paris 1965, p. 37).

Sembra che lasciando decadere TE non si possa costruire la catena ascendente degli infiniti, ottenuti per esponenziazione di un insieme infinito di partenza, per esempio l'infinito numerabile. In effetti, Brouwer opera esclusivamente con i primi due infiniti: il numerabile, in quanto si può ricorsivamente costruire, per esempio a partire dall'insieme vuoto, e il continuo, dando del secondo un modello numerabile.

Come uscirne?

Conservare TE o conservare la sequenza infinita degli infiniti?

La mia opzione è: lasciamo cadere TE, per la sua valenza di onniscienza, e conserviamo la successione infinita di infiniti, per la sua valenza oggettuale.

Tuttavia, la cosa non è così semplice. Esistono difficoltà soggettive – Freud le chiamerebbe resistenze – all'acquisizione di nuovo sapere, difficoltà che sono particolarmente forti quando si tratta del sapere riguardante il nuovo oggetto della modernità: l'infinito. Per tale sapere Giordano Bruno finì sul rogo e Galilei lo schivò per un pelo.

Esiste una singolare e inquietante analogia tra l'andamento della dimostrazione del teorema di Cantor e l'argomento di Russel che porta all'antinomia omonima. L'inquietudine associa in uno stesso fascio l'infinito e il contraddittorio, rievocando considerazioni di buon senso che fanno una cosa sola di *reductio ad infinitum* e *reductio ad absurdum*.

(Aperta parentesi. L'unificazione delle due reductiones risale al secondo libro della *Metafisica* di Aristotele, dove lo Stagirita dimostra la contraddizione dell'infinito attuale. Infatti, se esistesse ontologicamente un infinito attuale, non si potrebbe risalire dalle cause seconde alla causa prima in un numero finito di passi. Ma questo argomento non vale più noi, che abbiamo sospeso in epoca scientifica il principio eziologico. Chiusa parentesi).

Espongo schematicamente l'argomento di Russel.
Sia R l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi. In formule,

$R = \{x \mid x \notin x\}$.

Si danno, due casi:
a) $R \in R$. Allora $R \notin R$, perché se R appartiene a R, allora R non appartiene a R per definizione.
b) $R \notin R$. Allora $R \in R$, perché la non appartenenza è la condizione di appartenenza.
In entrambi i casi si ha una contraddizione. Poiché i casi del TE sono solo due, la contraddizione esiste veramente.

Cosa c'è di troppo in questo argomento? Il TE o qualcos'altro? Non potrebbe darsi il caso che R appartenga e non appartenga a R, restando in un certo senso alla frontiera di se stesso? No. A mio parere di troppo c'è il principio di comprensione forte per cui, dato un concetto, φ esiste la sua estensione cioè l'insieme degli x che rientrano nel concetto. In formule,

$X = \{ x \mid \varphi(x) = 0\}$,

(Il principio di comprensione debole, per cui ad ogni insieme corrisponde un concetto, non sembra dar problemi).
Il principio di comprensione forte, voluto da Frege nel suo programma di logicizzazione della matematica, è un principio logocentrico di stampo hegeliano, per cui tutto ciò che si pensa è reale, cioè ha un'estensione. Il *logos* comanda l'essere. Conviene senz'altro lasciarlo cadere.
Conservando TE?

Si può tentare la seguente dimostrazione semintuizionista del teorema di Cantor, che non usa TE ma l'assioma della scelta (AS).

Dimostriamo come sia difficile costruire una biiezione $f: X \to P(X)$.
Sia X l'immagine di un certo x.
Sia $X - \{x\}$ l'immagine di un certo $y \neq x$.
Sia $X - \{x,y\}$ l'immagine di un certo $z \neq x$ e $z \neq y$,
Sia $X - \{x,y, z\}$ l'immagine di un certo $w \neq x$ e $w \neq y$ e $w \neq z$.
e così via fino a esaurire tutti gli elementi di X.
A questo punto $X - \{y\}$ resta senza controimmagine.

Quelle delineate sono difficoltà concettuali a trattare l'oggetto infinito. La mente che vacilla rigetta la questione con un alzata di spalle: "Uffa, questo infinito! Roba da preti o una faccenda per nevrotici ossessivi!". Conosco bene queste reazioni per averle censite anche tra colleghi. Ma, riprendendo il detto di Charcot, ricordato da Freud: *La théorie, c'est bon, mais ça n'empêche pas d'exister* (S. Freud, "Charcot", in *Sigmund Freud Gesammelte Werke*, Frankfurt a.M. 1999, p. 24), dico: "L'infinito esiste". Lo testimoniano le scienze; lo dovrebbe testimoniare anche la psicanalisi, se fosse scientifica. Esiste – l'infinito – nel senso matematico del termine: appartiene a un insieme che esiste. Deriva da quello la propria esistenza. Ma se esiste l'infinito, la teoria non può più essere quella che vigeva ai tempi di Ippocrate e di Aristotele, metapsicologia di Freud compresa. Il lutto per la perdita di queste vecchie e care teorizzazioni metafisiche e metamediche continua.

L'intuizionismo sta a metà tra accettazione e rifiuto dell'infinito. Grazie al suo costruttivismo accetta l'infinito numerabile, grazie alla possibilità di definirlo ricorsivamente a partire dall'insieme vuoto, l'insieme paradossale che esiste anche se non esistono i suoi elementi:

$\varnothing$,
$\{\varnothing\}$,
$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$…

Tuttavia, l'intuizionismo esita ad accettare gli infiniti successivi al numerabile, che grazie al teoreme di Cantor si possono costruire come insieme delle parti di altri infiniti già costruiti. (Il metodo diagonale dovrebbe essere detto più correttamente metodo di esponenziazione). In un certo senso l'intuizionismo non accetta la nozione di esistenza come appartenenza: l'infinito numerabile esiste perché appartiene all'insieme delle sue parti; l'infinito continuo esiste perché appartiene all'insieme delle sue parti (cioè l'insieme di tutte le applicazione dell'infinito continuo su se stesso) ecc. L'intuizionismo, cioè, non accetta questa sorta di "certezza anticipata", per cui l'insieme delle parti, cui appartiene l'insieme di partenza, esiste "prima" di questi, perché a sua volta appartiene al proprio insieme delle parti… e così via all'infinito senza fondamento ultimo.

Cos'ha da dire l'analista in proposito?

Semplicemente, cioè empiricamente, che gli va bene operare senza fondamenti. Gli va bene, in particolare, l'infinito numerabile per formalizzare la ripetizione, ma non può limitarsi all'infinito numerabile. Non può, infatti, fare a meno dell'infinito più che numerabile dell'oggetto dello sguardo o dell'oggetto della voce. Insomma, l'analista è intuizionista, ma con giudizio.