Procedimento diagonale di Cantor

Da “Storia della logica. Da Boole ai nostri giorni”
di Corrado Mangione e Silvio Bozzi, Garzanti, Milano 1993, pp. 312-313.

È chiaro che basterà dimostrare che non è numerabile un sottoinsieme proprio dell’insieme **R** dei numeri naturali, ché *a fortiori* anche **R** risulterà in questo caso non numerabile. Consideriamo allora il sottoinsieme R_1 dell’insieme **R**, costituito da tutti i numeri reali compresi fra 0 e 1. Ricordiamo che ogni numero reale può essere scritto in forma decimale e che quindi l’insieme R_1 sarà composto da numeri della forma $\alpha_i = 0,$ $a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ a_{i4}...$ (il motivo dei doppi indici sarà subito chiaro). Tenuto conto che un numero decimale «limitato» (razionale) si può scrivere in due modi equivalenti (ad es. 0,50000000... = 0,49999999...), conveniamo di scegliere in ogni caso uno (qualsiasi) dei due (ad es. quello di periodo 9). Ciò premesso, la dimostrazione prosegue per assurdo. Supponiamo che il nostro insieme sia numerabile; ciò vuol dire, come sappiamo, che è possibile ordinare i suoi elementi in una successione

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$$

Supponiamo i numeri di questa successione disposti come nella tabella seguente

$$\begin{array}{c}
\alpha_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ a_{16}\ \ldots \\
\backslash \\
\alpha_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}\ a_{26}\ \ldots \\
\backslash \\
\alpha_2 = 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ a_{35}\ a_{36}\ \ldots \\
\backslash \\
\ldots \\
\backslash \\
\alpha_n = 0,\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ a_{n4}\ \ldots\ a_{nn}\ \ldots \\
\backslash \\
\ldots
\end{array}$$

Costruiamo ora un numero reale β compreso fra 0 e 1 e tale che, comunque la successione sia costruita, β non figuri certamente in essa. Definiamo allora il seguente numero reale

$$\beta = 0,\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ \ldots \text{ dove } \begin{array}{l} b_i = 2 \text{ se } a_{ii} \neq 2 \\ b_i = 1 \text{ se } a_{ii} = 2. \end{array}$$

È chiaro che tale numero non compare nella successione precedente perché differisce da α_1 almeno per la prima cifra decimale, da α_2 almeno per la seconda, in generale da α_n, almeno per l’n-esima. Osservando la «freccia» tracciata nella tabella e dopo quanto detto è immediata la giustificazione del nome di «procedimento diagonale di Cantor» dato a questo metodo di dimostrazione.

Abbiamo quindi visto che non è possibile coordinare biunivocamente già il sottoinsieme proprio R_1 dell’insieme **R** dei numeri reali con l’insieme **N** dei numeri interi; l’insieme **R** risulta pertanto «non numerabile», cioè appartiene per così dire a un tipo di infinità diversa (superiore) rispetto a quella di **N**, o di **Q** (l’insieme dei numeri razionali), o di **A** (l’insieme dei numeri algebrici, cioè radici di polinomi). Tenendo anzi conto del risultato sull’insieme **A** dei numeri algebrici, che è equipotente a **N**, risulta che i numeri trascendenti, ossia i numeri che *non* sono radici di polinomi, costituiscono a loro volta un insieme **T** più che numerabile. Infine, dal punto di vista della caratterizzazione dei continuo si è così ottenuta una sua distinzione di tipo *cardinale*, rispetto ad esempio all'insieme **Q** dei razionali, o all'insieme **N** dei naturali: in generale rispetto a ogni insieme «numerabile».