Einstein Albert, Podolski Boris e Rosen Nathan

La descrizione quantica della realtà può essere considerata completa? (1935)[1]

In una teoria completa vi è un elemento in corrispondenza a ciascun elemento della realtà. Una condizione sufficiente per la realtà di una grandezza fisica è la possibilità di prevederla con certezza senza perturbare il sistema. Nella meccanica quantica, quando si hanno due grandezze fisiche descritte da operatori che non commutano, la conoscenza dell'una preclude la conoscenza dell'altra. Allora, o è incompleta la descrizione della realtà fornita dalla funzione d'onda della meccanica quantica, o non possono, queste due grandezze, essere simultaneamente reali. Studiando il problema di fare previsioni relative a un sistema sulla base di misure effettuate su un altro sistema, che abbia in precedenza interagito col primo, si giunge alla conclusione che se il primo enunciato è falso, è falso anche il secondo. Se ne deduce che la descrizione della realtà fornita da una funzione d'onda non è completa.

1. Ogni serio esame di una teoria fisica presuppone la distinzione fra la realtà obiettiva, che è indipendente da qualsiasi teoria, e i concetti fisici con cui la teoria stessa opera. Questi concetti si presuppone corrispondano alla realtà obiettiva, e con essi noi ci rappresentiamo quella realtà.

Quando tentiamo di giudicare il successo di una teoria fisica possiamo porci due domande: 1) «La teoria è corretta? » e 2) « La descrizione fornita dalla teoria è completa? » Solo in caso di risposta affermativa a entrambe le domande diremo che i concetti della teoria sono soddisfacenti. La correttezza della teoria è giudicata in base al grado di accordo fra le sue conclusioni e l'esperienza umana; questa esperienza, che sola ci consente di inferire alcunché sul reale, assume in fisica la forma di esperimenti e misure. Qui desideriamo occuparci, con riferimento alla meccanica quantica, della seconda domanda.

Qualunque significato si attribuisca al termine « completo » sembra necessario, per la completezza di una teoria, che essa soddisfi alla condizione seguente: ciascun elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica. Questa la chiameremo « condizione di completezza ». Quindi dare una risposta alla seconda domanda è facile, quando si sia in grado di decidere quali sono gli elementi della realtà fisica.

Gli elementi della realtà fisica non possono essere determinati da considerazioni filosofiche a priori, ma debbono essere trovati ricorrendo ai risultati di esperimenti e di

[1] [A questo articolo, oggi comunemente denominato «EPR», Niels Bohr replicò con due scritti (Quantum Mechanics and Physical Reality, in «Nature», cxxxvi, 1935, p. 65; Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, in « Physical Review», XLVIII, 1935, pp. 696-702) per sottolineare, quella che, a suo dire, era 1'« ambiguità intrinseca» del criterio di realtà col quale Einstein e collaboratori si ripromettevano di dimostrare l'incompletezza della meccanica quantica. Un significato non ambiguo dell'espressione « realtà fisica » non era infatti deducibile da «concezioni filosofiche a priori »' ma doveva basarsi SU esperimenti e su misure. Da questo punto di vista, la contraddizione denunciata in EPR, secondo Bohr, era solo apparente, e, al più, metteva in luce « l'inadeguatezza di fondo della concezione tradizionale della filosofia naturale». Era necessario; allora, sottoporre a una « revisione radicale» le usuali credenze sulla realtà fisica ne più né meno di quanto era stato fatto grazie alla teoria della relatività generale, a proposito delle idee sul «carattere assoluto dei fenomeni fisici».]

misure. Tuttavia, per i nostri scopi, non è necessario dare una definizione esauriente di realtà. Ci accontenteremo del criterio seguente, che consideriamo ragionevole. Se si è in grado di prevedere con certezza (cioè con probabilità uguale a uno), il valore di una grandezza fisica senza perturbare in alcun modo un sistema, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a questa grandezza fisica. Ci sembra che un tale criterio, pur lungi dall'esaurire tutti i possibili modi di riconoscere una realtà fisica, ci fornisca almeno uno di questi modi, qualora le condizioni in esso stabilite si presentino. Considerato non come una condizione necessaria, ma soltanto sufficiente di realtà, questo criterio è in accordo sia con l'idea classica sia con quella quantica di realtà. Per illustrare le idee qui implicate, consideriamo la descrizione quantica del comportamento di una particella avente un solo grado di libertà. Il concetto fondamentale della teoria è quello di «stato», che si suppone completamente caratterizzato dalla funzione d'onda ψ, la quale è una funzione delle variabili scelte per descrivere il comportamento della particella. In corrispondenza ad ogni grandezza A fisicamente osservabile vi è un operatore, che può essere indicato con la stessa lettera.

Se ψ è un'autofunzione dell'operatore A, cioè se

$$\psi \equiv A\psi = a\psi \qquad [1]$$

dove a è un numero, allora la grandezza fisica A possiede sicuramente il valore a ogni volta che la particella è nello stato specificato da ψ. In accordo con il nostro criterio di realtà, per una particella il cui stato sia definito da una ψ soddisfacente la [1] vi è un elemento di realtà fisica corrispondente alla grandezza fisica A. Sia, per esempio,

$$\psi = \exp[(2\pi i/h)p_0 x] \qquad [2]$$

dove h è la costante di Planck, p_0 un numero costante e x la variabile indipendente. Poiché l'operatore corrispondente al momento della particella è

$$p = (h/2\pi i)\partial/\partial x, \qquad [3]$$

si ottiene

$$\psi = p\psi = (h/2\pi i)\partial\ \psi/\partial x = p_0\psi \qquad [4]$$

e pertanto, nello stato dato dall'equazione [2], il momento ha certamente il valore p_0. Ha dunque significato dire che il momento della particella, in tale stato, è reale.

Viceversa, se l'equazione [1] non vale, non si può più parlare della grandezza fisica A come se avesse un valore particolare. Ciò accade, ad esempio, per la posizione della particella. L'operatore ad essa corrispondente, diciamo q, è l'operatore di moltiplicazione per la variabile indipendente. Dunque:

$$q\psi = x\psi \neq a\psi. \qquad [5]$$

Secondo la meccanica quantistica possiamo solo dire che la probabilità relativa che una misura della posizione fornisca un risultato compreso fra a e b è

$$P(a, b) = \int_a^b \bar{\psi}\psi\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a. \qquad [6]$$

Poiché questa probabilità non dipende da a, ma solo dalla differenza $b - a$, si vede che tutti i valori della posizione hanno la stessa probabilità.

Quindi, per una particella che sia nello stato dato dall'equazione [2] un valore determinato della posizione non può essere previsto, ma può essere ottenuto solo tramite una misura diretta. Una misura del genere, tuttavia, disturba la particella e quindi altera il suo stato. Dopo che la posizione è stata determinata, la particella non si trova più nello stato dato dall'equazione [2]. Da ciò si è soliti concludere, in meccanica quantica, che *quando il momento di una particella è noto, la sua posizione non possiede realtà fisica*.

Più in generale, si dimostra, in meccanica quantica, che se gli operatori corrispondenti a due grandezze fisiche, diciamo A e B, non commutano, cioè se $AB \neq BA$, allora la conoscenza precisa di una di esse preclude una conoscenza precisa dell'altra. Inoltre qualunque tentativo di determinare sperimentalmente la seconda altera lo stato del sistema in modo tale da distruggere la conoscenza della prima.

Di conseguenza, due sono le possibilità: 1) *la descrizione quantica della realtà, fornita dalla funzione d'onda, è incompleta;* 2) *quando i corrispondenti operatori non commutano, due grandezze fisiche non possono essere, simultaneamente reali*. Infatti se esse avessero realtà simultanea, e quindi valori definiti, questi valori, in base alla condizione di completezza, entrebbero nella descrizione completa. Se allora la funzione d'onda provvedesse questa descrizione completa della realtà, essa conterrebbe questi valori, i quali sarebbero pertanto prevedibii. Siccome non è così, resta solo l'altra alternativa enunciata.

In meccanica quanstitica si suppone di solito che la funzione d'onda contenga una descrizione completa della realtà fisica del sistema nello stato cui corrisponde. A prima vista questa ipotesi è del tutto ragionevole, perché l'informazione ottenibile da una funzione d'onda sembra corrispondere esattamente a ciò che può essere misurato senza alterare lo stato del sistema. Dimostreremo tuttavia che questa ipotesi, insieme col criterio di realtà fornito sopra, porta a una contraddizione.

2. Supponiamo, a questo scopo, che siano dati due sistemi, I e II, ai quali permettiamo di interagire dall'istante $t = 0$ all'istante $t = T$; dopo questo istante, fra le due parti non vi sia più alcuna interazione. Supponendo noti i loro rispettivi stati prima di $t = 0$, possiamo calcolare, con l'ausilio dell'equazione di Schrödinger, lo stato del sistema composto I + II in ogni istante successivo, e in particolare, per ogni $t > T$. Indichiamo con Ψ la funzione d'onda corrispondente. Non possiamo tuttavia calcolare lo stato in cui l'uno o l'altro dei due sistemi viene a trovarsi dopo l'interazione. Ciò, in base alla meccanica quantistica, si può fare solo con misure ulteriori, mediante un procedimento noto come « riduzione del pacchetto d'onda ». Consideriamo le linee essenziali di questo procedimento.

Siano a_1, a_2, a_3, .. gli autovalori di una grandezza fisica A afferente al sistema I e $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1)$, ... le autofunzioni corrispondenti, dove x_1 rappresenta le variabili usate per descrivere il primo sistema. Allora Ψ, considerata come funzione di x_1, può essere espressa nella forma

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \qquad [7]$$

dove x_2 rappresenta le variabili usate per descrivere il secondo sistema. Qui le $\psi_n(x_2)$ debbono essere considerate semplicemente come i coefficienti dello sviluppo di Ψ in una serie di funzioni ortogonali $u_n(x_1)$. Supponiamo ora che venga misurata la grandezza A e che si trovi che ha il valore a_k. Allora si conclude che, dopo la misura, il primo sistema viene lasciato nello stato descritto dalla funzione d'onda $u_k(x_1)$, e il secondo sistema nello stato descritto dalla funzione d'onda $\psi_k(x_2)$. È questo il processo di riduzione del pacchetto d'onda: il pacchetto d'onda dato dalla serie infinita [7] viene ridotto a un unico termine, $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$.

L'insieme delle funzioni $u_n(x_1)$ è determinato dalla scelta della grandezza fisica A. Se avessimo scelto un'altra grandezza, diciamo B, avente autovalori b_1, b_2, b_3, ... e autofunzioni $v_1(x_1)$, $v_2(x_1)$, $v_3(x_1)$, ... avremmo ottenuto, invece dell'equazione [7], lo sviluppo

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1), \qquad [8]$$

dove le φ_s sono i nuovi coefficienti. Se ora viene misurata la grandezza B e si trova che il suo valore è b, si conclude che dopo la misura il primo sistema viene lasciato nello stato descritto da $vr(x_1)$ e il secondo sistema è lasciato nello stato descritto da $\varphi_r(x_2)$

Si vede pertanto che, in seguito a due misure diverse effettuate sul primo sistema, il secondo può essere lasciato in stati con due funzioni d'onda diverse. D'altra parte, poiché all'istante della misura i due sistemi non interagiscono più, il secondo sistema non può subire alcuna modificazione reale in conseguenza di operazioni effettuate sul primo sistema. Ciò, naturalmente, è solo un'espressione di ciò che s'intende per assenza d'interazione fra i due sistemi. Pertanto *è possibile assegnare due diverse funzioni d'onda* (nel nostro esempio ψ_k e φ_r) *alla stessa realtà* (al secondo sistema dopo l'interazione con il primo).

Orbene, può accadere che le due funzioni d'onda, ψ_k e φ_r, siano autofunzioni di due operatori che non commutano, corrispondenti rispettivamente a certe grandezze fisiche P e Q. Che ciò possa effettivamente accadere si dimostra, nel modo migliore, mediante un esempio. Supponiamo che i due sistemi siano due particelle e che

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p]\mathrm{d}p, \qquad [9]$$

dove x_0 è una costante. Sia A il momento della prima particella; allora, come abbiamo visto nell'equazione [4], le sue autofunzioni saranno

$$u(x_1) = \exp[(2\pi i/h)px_1] \qquad [10]$$

in corrispondenza all'autovalore p. Poiché qui si presenta il caso di uno spettro continuo, l'equazione [7] si scriverà nella forma

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1)\mathrm{d}p, \qquad [11]$$

dove

$$\psi_p(x_2) = \exp[-(2\pi i/)/(x_2 - x_0)p]. \qquad [12]$$

Questa ψ_p, tuttavia, è l'autofunzione dell'operatore

$$P = (h/2\pi i)\partial/\partial x_2, \qquad [13]$$

corrispondente all'autovalore $-p$ del momento della seconda particella. D'altra parte, se B è la posizione della prima particella, le sue autofunzioni sono

$$v(x_1) = \delta(x_1 - x), \qquad [14]$$

in corrispondenza all'autovalore x, dove $\delta(x-x_1)$ è la ben nota funzione delta di Dirac. In questo caso l'equazione [8] diventa

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1), \qquad [15]$$

dove

$$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[(2\pi i/h)/(x-x_2+x_0)p]\mathrm{d}p = h\delta(x-x_2+x_0) \qquad [16]$$

Questa φ_x, peraltro, è l'autofunzione dell'operatore

$$Q = x_2 \qquad [17]$$

corrispondente all'autovalore $x+x_0$ della posizione della seconda particella. Poiché

$$PQ - QP = h/2\pi i, \qquad [18]$$

abbiamo dimostrato che, in generale, è possibile che ψ_k e φ_r siano autofunzioni di due operatori che non commutano, corrispondenti a grandezze fisiche.

Tornando ora al caso generale contemplato nelle equazioni [7] e [8], supponiamo che ψ_k e φ_r siano in effetti autofunzioni di due operatori P e Q che non commutano, rispettivamente corrispondenti agli autovalori p_k e q_r. Così, misurando o A o B, siamo in grado di prevedere con certezza, e senza in alcun modo perturbare il secondo sistema, o il valore della grandezza P (cioè p_k) o il valore della grandezza Q (cioè q_r). Secondo il nostro criterio di realtà, nel primo caso dobbiamo considerare la grandezza P come un elemento di realtà; nel secondo caso un elemento di reltà è la grandezza Q. Ma, come abbiamo visto, entrambe le funzioni d'onda che ψ_k e φ_r appartengono alla stessa realtà.

Abbiamo prima dimostrato che, o (1) la descrizione quantica della realtà fornita dalla funzione d'onda è incompleta, o (2) quando i corrispondenti operatori non commutano, due grandezze non possono avere realtà simultanea. Partendo poi dall'ipotesi che la funzione d'onda fornisca effettivamente una descrizione completa della realtà fisica, abbiamo dedotto che due grandezze fisiche, con operatori che non commutano, possono avere realtà simultanea. Cosicché la negazione di (1) porta alla negazione dell'altra unica alternativa (2). Siamo perciò obbligati a concludere che la descrizione quantica della realtà fisica fornita dalle funzioni d'onda è 'incompleta.

Si potrebbe obiettare che il nostro criterio di realtà non è abbastanza restrittivo. In effetti a quella conclusione non si giungerebbe introducendo la condizione seguente: due o più grandezze fisiche si possono considerare elementi simultanei di realtà solo quando le si può misurare o prevedere simultaneamente. Da questo punto di vista, poiché le grandezze P e Q sono prevedibili singolarmente, ma non entrambe allo stesso istante, esse non sono simultaneamente reali. Ciò fa dipendere la realtà di P e di Q dal procedimento di misura adottato nel primo sistema, procedimento che non perturba in alcun modo il secondo sistema. Nessuna definizione accettabile di realtà potrebbe concedere ciò.

Mentre abbiamo in tal modo dimostrato che la funzione d'onda non fornisce una descrizione completa della realtà fisica, abbiamo lasciato aperto il problema se una descrizione completa esista oppure no. Noi, comunque, crediamo che una teoria di questo tipo sia possibile.

(Ricevuto il 15 marzo 1935).