

# Giulio Cesare Barozzi (Università di Bologna)

## Frazioni continue

Tutti sappiamo che non v'è alcun razionale il cui quadrato sia uguale a 2, o, per dirla in termini attuali, tutti sappiamo  $\sqrt{2}$  è un numero irrazionale. Vediamo di trovarne delle approssimazioni razionali. Una prima, grossolana, approssimazione consiste nel prendere la parte intera (meglio: l'approssimazione intera per difetto): poiché  $1^2 = 1$  e  $2^2 = 4$ , avremo che  $\sqrt{2}$  è compresa tra 1 e 2 diciamo

$$\sqrt{2} = 1 + t, \quad \text{con } t > 0.$$

Vediamo di stimare  $t$ , cioè la parte frazionaria di  $\sqrt{2}$ ; elevando al quadrato i due membri dell'uguaglianza scritta abbiamo  $2 = 1 + 2t + t^2$ . Poiché  $t$  è strettamente compreso tra 0 e 1, possiamo trascurare  $t^2$ , e dedurne per  $t$  la stima  $t = 1/2$ . Dunque

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2}.$$

La quantità a secondo membro,  $3/2$ , è una sovrastima di  $\sqrt{2}$  (basta elevare  $3/2$  al quadrato), quindi

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+t}, \quad \text{con } t > 0. \quad (*)$$

Proviamo a calcolare quanto vale  $t$ : abbiamo l'equazione

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2+t} \iff 2+t = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$$

e finalmente  $t = \sqrt{2} - 1$ . Sostituendo nella (\*) abbiamo

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}-1}} \iff \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}.$$

Apparentemente non abbiamo fatto alcun progresso: abbiamo riportato il calcolo della parte frazionaria di  $\sqrt{2}$  su sé stessa. Se però continuiamo a sostituire a tale parte frazionaria l'espressione  $1/(2 + \sqrt{2} - 1)$ , otteniamo le scritture

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}}, \quad \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}}}, \dots$$

cioè

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}}, \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}}}, \dots$$

In definitiva, immaginando di proseguire all'infinito il procedimento, siamo condotti ad una scrittura del tipo

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \quad (**)$$

a cui non sappiamo bene quale significato attribuire.

Consideriamo le frazioni che si ottengono fermandoci al primo, al secondo, al terzo denominatore e trascurando sistematicamente il secondo addendo del denominatore stesso, cioè consideriamo le frazioni

$$r_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad r_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}, \quad r_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}, \quad \dots;$$

esse sono approssimazioni razionali sempre migliori di  $\sqrt{2}$ . Procedendo otteniamo

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3/2 &= 1.5 \\ 7/5 &= 1.4 \\ 17/12 &= 1.41666\dots \\ 41/29 &= 1.413793\dots \\ 99/70 &= 1.414285\dots \\ 239/169 &= 1.414201\dots \\ 577/408 &= 1.414215\dots \end{aligned}$$

Abbiamo un andamento “oscillante” ed una convergenza rapidissima verso  $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$

La (\*\*\*) costituisce lo sviluppo in *frazione continua* (illimitata periodica) del numero irrazionale  $\sqrt{2}$ . Scriviamo formalmente, mettendo in evidenza i quozienti via via calcolati,

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots] = [1, \overline{2}].$$

Anche i numeri razionali danno luogo ad uno sviluppo in frazione continua (questa volta limitata). Basta leggere il classico algoritmo euclideo per il calcolo del MCD tenendo d’occhio i quozienti anziché i resti. Ci spieghiamo con un esempio. Supponiamo di voler calcolare il MCD tra 21 e 8. Abbiamo la tabella seguente:

numeratore	denominatore	quoziente	resto	
21	8	2	5	$\iff 21/8 = 2 + 5/8$
8	5	1	3	$\iff 8/5 = 1 + 3/5$
5	3	1	2	$\iff 5/3 = 1 + 2/3$
3	2	1	1	$\iff 3/2 = 1 + 1/2$
2	1	2	0	$\iff 2/1 = 2 + 0/1$

Sfruttiamo una dopo l’altra le uguaglianze dell’ultima colonna:

$$\begin{aligned} \frac{21}{8} &= 2 + \frac{5}{8} = 2 + \frac{1}{\frac{8}{5}} = \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{3}}} = \\ &= \dots\dots\dots = \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} \end{aligned}$$

Utilizzando una notazione già introdotta:  $21/8 = [2, 1, 1, 1, 2]$ . Abbiamo ottenuto lo sviluppo in frazione continua *limitata* (o *finita*) di  $21/8$ .

Veniamo al caso generale. Se  $x$  è un numero reale possiamo porre

$$x_1 := x, \quad q_1 := \lfloor x \rfloor,$$

da cui  $0 < x_1 - q_1 < 1$ ; si osservi che, se  $x$  è irrazionale, tale è anche la differenza  $x_1 - q_1$ . Poniamo poi

$$x_2 := \frac{1}{x_1 - q_1}, \quad q_2 := \lfloor x_2 \rfloor.$$

In generale, per  $n \geq 1$  possiamo porre

$$x_{n+1} := \frac{1}{x_n - q_n}, \quad q_{n+1} := \lfloor x_{n+1} \rfloor;$$

si ha, per ogni  $n$ ,  $0 < x_i - q_i < 1$ , dunque le definizioni poste sono corrette. La sequenza delle  $x_n$  termina se  $x = p/q$  è razionale dopo  $k$  passi,  $k$  essendo la lunghezza dell'algoritmo euclideo applicato alla coppia  $(p, q)$ ; in caso contrario essa è una vera e propria successione.

Supponiamo  $x$  irrazionale: ad esso vengono dunque associate due successioni  $(q_n)$  e  $(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , la prima di numeri interi, la seconda di numeri irrazionali, tali che

$$\forall n \geq 2 \quad (q_n \in \mathbb{N}^* \wedge x_n > 1).$$

Scriveremo, in analogia con quanto scritto in precedenza,

$$x = [q_1, q_2, \dots, q_n, \dots], \quad (***)$$

dove il significato preciso dell'uguaglianza scritta verrà chiarito tra breve.

Diremo che la (\*\*\*) rappresenta lo sviluppo in *frazione continua illimitata* del numero irrazionale  $x$ ; gli interi  $q_n$  vengono chiamati *quozienti incompleti*, mentre i numeri irrazionali  $x_n$  verranno detti *quozienti completi*. Le *ridotte* (o *convergenti*) sono i numeri razionali

$$c_n := [q_1, q_2, \dots, q_n], \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Le ridotte godono di notevolissime proprietà:

- i) le ridotte di indice dispari  $c_{2i+1}$  crescono strettamente, mentre le ridotte di indice pari  $c_{2i}$  decrescono strettamente, al crescere dell'indice  $i$ ;
- ii) ogni ridotta di indice dispari è minore di ogni ridotta di indice pari;
- iii)  $x$  è maggiore di ogni ridotta di indice dispari e minore di ogni ridotta di indice pari; se  $x$  è razionale, esso è uguale all'ultima ridotta, se  $x$  è irrazionale la successione delle ridotte converge a  $x$  stesso.

La cosa più interessante è che ciascuna ridotta approssima  $x$  in modo ottimale, nel senso che se  $c_n = a_n/b_n$  (s'intende che l'ultima frazione è ridotta ai minimi termini), allora non v'è alcuna frazione con denominatore inferiore a  $b_n$  che approssimi  $x$  meglio di  $c_n$ .

Ad esempio, abbiamo visto che  $99/70$  è una ridotta dello sviluppo in frazione continua di  $\sqrt{2}$ ; ebbene, non v'è alcuna frazione con denominatore inferiore a 70 che approssimi  $\sqrt{2}$  meglio di  $99/70$ .

Il rapporto  $99/70$  interviene in oggetti di uso quotidiano: un comune foglio in formato A4 (foglio per fotocopiatrice) ha le dimensioni (in mm)  $210 \times 297$ . Ora

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70},$$

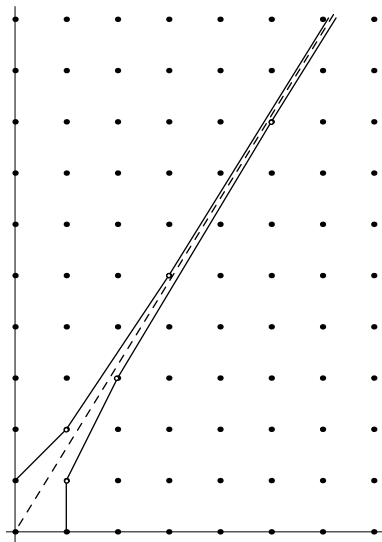
dunque un foglio A4 è, con buona approssimazione, un rettangolo normale, cioè un rettangolo in cui il rapporto tra lato maggiore e lato minore vale  $\sqrt{2}$ . I rettangoli normali godono della proprietà che, piegandoli congiungendo i punti di mezzi dei due lati maggiori, si ottengono due rettangoli simili a quelli di partenza.

Un notevole risultato stabilito da J.L. Lagrange nel 1770 afferma che la successione  $(q_n)$  è periodica se e solo se  $x$  è un *irrazionale quadratico*, cioè se esso è soluzione di un'equazione di secondo grado a coefficienti interi. Un paio di esempi:

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots] = [1, \overline{2}], \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, 1, \dots] = [1, \overline{1}].$$

Abbiamo appena considerato il cosiddetto *rapporto aureo*, numero a cui tende la successione  $F_{n+1}/F_n$  dei rapporti tra ciascun numero di Fibonacci e il numero precedente. Tali rapporti sono esattamente le ridotte dell'ultimo sviluppo scritto.

Un'interessante interpretazione geometrica dello sviluppo in frazione continua di un numero reale  $x$  fu data nel 1897 da Felix Klein. Supponiamo  $x$  positivo e segniamo, nel primo quadrante del piano cartesiano i punti a coordinate entrambe intere. Possiamo immaginare che in tali punti siano fissati dei pioli. Se  $x$  è irrazionale la retta passante per l'origine e avente  $x$  come coefficiente angolare non contiene alcun punto a coordinate intere. Immaginiamo che su tale retta sia teso un filo, fisso in un punto infinitamente lontano della retta stessa; tenendo il filo teso, spostiamo il capo che si trova nell'origine verso sinistra: il filo si appoggia su certi pioli posti sopra la retta considerata, mentre se spostiamo lo stesso capo verso destra esso si appoggia a certi pioli posti sotto la retta. Questi pioli corrispondono nel primo caso, alle ridotte di indice pari, nel secondo caso alle ridotte di indice dispari dello sviluppo di  $x$  in frazione continua. La figura mostra ciò relativamente al rapporto aureo  $(1 + \sqrt{5})/2$ .



### Riferimenti bibliografici

- Barozzi G.C. (2006). *Aritmetica: un approccio computazionale*, Milano: Springer Italia.
- Davenport H. (1994). *Aritmetica superiore*, Bologna: Zanichelli (in part. il cap. 4).
- Falcolini C. (2006). *Numeri in un foglio di carta*, Archimede 2/2006, 88-93.
- Gardner M. (1979). *Le curiose frazioni dell'antico Egitto danno luogo a rompicapo e a problemi di teoria dei numeri*, Le Scienze, **126** (1979), 100-101.
- Niven I. (1966). *Numeri razionali e numeri irrazionali*, Bologna: Zanichelli [volume non più in catalogo].
- Olds C.D. (1976). *Frazioni continue*, Bologna: Zanichelli [volume non più in catalogo].
- Pirillo G. (2006). *Sulla frazione continua di  $\sqrt{2}$* , Archimede, 4/2005, 197-198; *Sulla frazione continua di  $\sqrt{3}$* , ibidem 1/2006, 23-25; *Sulla frazione continua di  $(\sqrt{5} + 1)/2$* , Bollettino dei Docenti di Matematica (Canton Ticino), **52** (2006), 91-93.
- Scimemi B. (1993). *Le frazioni continue rivisitate*, Atti del Quindicesimo Convegno sull'insegnamento della matematica, Notiziario UMI, Suppl. 5, maggio 1993.
- Esistono in rete vari siti dedicati alle frazioni continue; suggeriamo di ricercare con Google la voce *frazioni continue*, oppure *continued fractions*.