Giulio Cesare Barozzi (Università di Bologna)

Frazioni continue

Tutti sappiamo che non v'è alcun razionale il cui quadrato sia uguale e 2, o, per dirla in termini attuali, tutti sappiamo $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale. Vediamo di trovarne delle approssimazioni razionali. Una prima, grossolana, approssimazione consiste nel prendere la parte intera (meglio: l'approssimazione intera per difetto): poiché $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$, avremo che $\sqrt{2}$ è compresa tra 1 e 2 diciamo

$$\sqrt{2} = 1 + t, \quad \text{con } t > 0.$$

Vediamo di stimare t, cioè la parte frazionaria di $\sqrt{2}$; elevando al quadrato i due membri dell'uguaglianza scritta abbiamo $2 = 1+2t+t^2$. Poiché t è strettamente compreso tra 0 e 1, possiamo trascurare t^2, e dedurne per t la stima $t = 1/2$. Dunque

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2}.$$

La quantità a secondo membro, $3/2$, è una sovrastima di $\sqrt{2}$ (basta elevare $3/2$ al quadrato), quindi

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+t}, \quad \text{con } t > 0. \tag{$*$}$$

Proviamo a calcolare quanto vale t: abbiamo l'equazione

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2+t} \iff 2 + t = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$$

e finalmente $t = \sqrt{2} - 1$. Sostituendo nella (*) abbiamo

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\sqrt{2}-1} \iff \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2+\sqrt{2}-1}.$$

Apparentemente non abbiamo fatto alcun progresso: abbiamo riportato il calcolo della parte frazionaria di $\sqrt{2}$ su sé stessa. Se però continuiamo a sostituire a tale parte frazionaria l'espressione $1/(2+\sqrt{2}-1)$, otteniamo le scritture

$$\sqrt{2} - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}}, \quad \sqrt{2} - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}}}, \dots$$

cioè

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}}, \quad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\sqrt{2}-1}}}, \dots$$

In definitiva, immaginando di proseguire all'infinito il procedimento, siamo condotti ad una scrittura del tipo

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}} \tag{$**$}$$

a cui non sappiamo bene quale significato attribuire.

Consideriamo le frazioni che si ottengono fermandoci al primo, al secondo, al terzo denominatore e trascurando sistematicamente il secondo addendo del denominatore stesso, cioè consideriamo le frazioni

$$r_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad r_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5}, \quad r_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12}, \quad \ldots;$$

esse sono approssimazioni razionali sempre migliori di $\sqrt{2}$. Procedendo otteniamo

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
3/2 &= 1.5\\
7/5 &= 1.4\\
17/12 &= 1.416666\ldots\\
41/29 &= 1.413793\ldots\\
99/70 &= 1.414285\ldots\\
239/169 &= 1.414201\ldots\\
577/408 &= 1.414215\ldots
\end{aligned}$$

Abbiamo un andamento "oscillante" ed una convergenza rapidissima verso $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$
La (**) costituisce lo sviluppo in *frazione continua* (illimitata periodica) del numero irrazionale $\sqrt{2}$. Scriveremo formalmente, mettendo in evidenza i quozienti via via calcolati,

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}].$$

Anche i numeri razionali danno luogo ad uno sviluppo in frazione continua (questa volta limitata). Basta leggere il classico algoritmo euclideo per il calcolo del MCD tenendo d'occhio i quozienti anziché i resti. Ci spieghiamo con un esempio. Supponiamo di voler calcolare il MCD tra 21 e 8. Abbiamo la tabella seguente:

numeratore	denominatore	quoziente	resto		
21	8	2	5	$\Longleftrightarrow$	$21/8 = 2 + 5/8$
8	5	1	3	$\Longleftrightarrow$	$8/5 = 1 + 3/5$
5	3	1	2	$\Longleftrightarrow$	$5/3 = 1 + 2/3$
3	2	1	1	$\Longleftrightarrow$	$3/2 = 1 + 1/2$
2	1	2	0	$\Longleftrightarrow$	$2/1 = 2 + 0/1$

Sfruttiamo una dopo l'altra le uguaglianze dell'ultima colonna:

$$\begin{aligned}
\frac{21}{8} &= 2 + \frac{5}{8} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{8}{5}} =\\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{5}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{3}}} =\\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =\\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}
\end{aligned}$$

Utilizzando una notazione già introdotta: $21/8 = [2, 1, 1, 1, 2]$. Abbiamo ottenuto lo sviluppo in frazione continua *limitata* (o *finita*) di $21/8$.

Veniamo al caso generale. Se x è un numero reale possiamo porre

$$x_1 := x, \quad q_1 := \lfloor x \rfloor,$$

da cui $0 < x_1 - q_1 < 1$; si osservi che, se x è irrazionale, tale è anche la differenza $x_1 - q_1$. Poniamo poi

$$x_2 := \frac{1}{x_1 - q_1}, \quad q_2 := \lfloor x_2 \rfloor.$$

In generale, per $n \geq 1$ possiamo porre

$$x_{n+1} := \frac{1}{x_n - q_n}, \qquad q_{n+1} := \lfloor x_{n+1} \rfloor;$$

si ha, per ogni n, $0 < x_i - q_i < 1$, dunque le definizioni poste sono corrette. La sequenza delle x_n termina se $x = p/q$ è razionale dopo k passi, k essendo la lunghezza dell'algoritmo euclideo applicato alla coppia (p, q); in caso contrario essa è una vera e propria successione.
Supponiamo x irrazionale: ad esso vengono dunque associate due successioni (q_n) e (x_n), $n \in \mathbb{N}^*$, la prima di numeri interi, la seconda di numeri irrazionali, tali che

$$\forall n \geq 2 \ (q_n \in \mathbb{N}^* \ \wedge \ x_n > 1).$$

Scriveremo, in analogia con quanto scritto in precedenza,

$$x = [q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots], \tag{$***$}$$

dove il significato preciso dell'uguaglianza scritta verrà chiarito tra breve.
Diremo che la (***) rappresenta lo sviluppo in *frazione continua illimitata* del numero irrazionale x; gli interi q_n vengono chiamati *quozienti incompleti*, mentre i numeri irrazionali x_n verranno detti *quozienti completi.* Le *ridotte* (o *convergenti*) sono i numeri razionali

$$c_n := [q_1, q_2, \ldots, q_n], \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Le ridotte godono di notevolissime proprietà:

i) le ridotte di indice dispari c_{2i+1} crescono strettamente, mentre le ridotte di indice pari c_{2i} decrescono strettamente, al crescere dell'indice i;

ii) ogni ridotta di indice dispari è minore di ogni ridotta di indice pari;

iii) x è maggiore di ogni ridotta di indice dispari e minore di ogni ridotta di indice pari; se x è razionale, esso è uguale all'ultima ridotta, se x è irrazionale la successione delle ridotte converge a x stesso.

La cosa più interessante è che ciascuna ridotta approssima x in modo ottimale, nel senso che se $c_n = a_n/b_n$ (s'intende che l'ultima frazione è ridotta ai minimi termini), allora non v'è alcuna frazione con denominatore inferiore a b_n che approssimi x meglio di c_n.
Ad esempio, abbiamo visto che 99/70 è una ridotta dello sviluppo in frazione continua di $\sqrt{2}$; ebbene, non v'è alcuna frazione con denominatore inferiore a 70 che approssimi $\sqrt{2}$ meglio di 99/70.
Il rapporto 99/70 interviene in oggetti di uso quotidiano: un comune foglio in formato A4 (foglio per fotocopiatrice) ha le dimensioni (in mm) 210×297. Ora

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70},$$

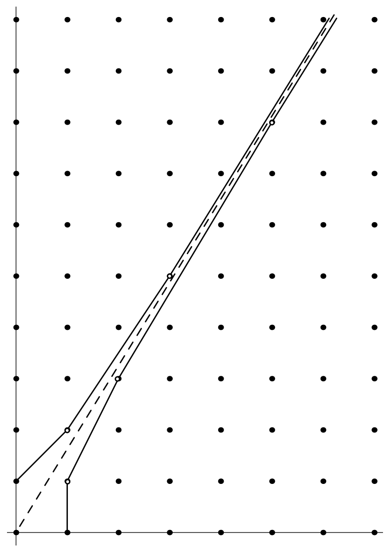
dunque un foglio A4 è, con buona approssimazione, un rettangolo normale, cioè un rettangolo in cui il rapporto tra lato maggiore e lato minore vale $\sqrt{2}$. I rettangoli normali godono della proprietà che, piegandoli congiungendo i punti di mezzi dei due lati maggiori, si ottengono due rettangoli simili a quelli di partenza.

Un notevole risultato stabilito da J.L. Lagrange nel 1770 afferma che la successione (q_n) è periodica se e solo se x è un *irrazionale quadratico*, cioè se esso è soluzione di un'equazione di secondo grado a coefficienti interi. Un paio di esempi:

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}], \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, 1, \ldots] = [1, \overline{1}].$$

Abbiamo appena considerato il cosiddetto *rapporto aureo*, numero a cui tende la successione F_{n+1}/F_n dei rapporti tra ciascun numero di Fibonacci e il numero precedente. Tali rapporti sono esattamente le ridotte dell'ultimo sviluppo scritto.

Un'interessante interpretazione geometrica dello sviluppo in frazione continua di un numero reale x fu data nel 1897 da Felix Klein. Supponiamo x positivo e segniamo, nel primo quadrante del piano cartesiano i punti a coordinate entrambe intere. Possiamo immaginare che in tali punti siano fissati dei pioli. Se x è irrazionale la retta passante per l'origine e avente x come coefficiente angolare non contiene alcun punto a coordinate intere. Immaginiamo che su tale retta sia teso un filo, fisso in un punto infinitamente lontano della retta stessa; tenendo il filo teso, spostiamo il capo che si trova nell'origine verso sinistra: il filo si appoggia su certi pioli posti sopra la retta considerata, mentre se spostiamo lo stesso capo verso destra esso si appoggia a certi pioli posti sotto la retta. Questi pioli corrispondono nel primo caso, alle ridotte di indice pari, nel secondo caso alle ridotte di indice dispari dello sviluppo di x in frazione continua. La figura mostra ciò relativamente al rapporto aureo $(1+\sqrt{5})/2$.



Riferimenti bibliografici

Barozzi G.C. (2006). *Aritmetica: un approccio computazionale*, Milano: Springer Italia.

Davenport H. (1994). *Aritmetica superiore*, Bologna: Zanichelli (in part. il cap. 4).

Falcolini C. (2006). *Numeri in un foglio di carta*, Archimede 2/2006, 88-93.

Gardner M. (1979). *Le curiose frazioni dell'antico Egitto danno luogo a rompicapo e a problemi di teoria dei numeri*, Le Scienze, **126** (1979), 100-101.

Niven I. (1966). *Numeri razionali e numeri irrazionali*, Bologna: Zanichelli [volume non più in catalogo].

Olds C.D. (1976). *Frazioni continue*, Bologna: Zanichelli [volume non più in catalogo].

Pirillo G. (2006). *Sulla frazione continua di* $\sqrt{2}$, Archimede, 4/2005, 197-198; *Sulla frazione continua di* $\sqrt{3}$, ibidem 1/2006, 23-25; *Sulla frazione continua di* $(\sqrt{5}+1)/2$, Bollettino dei Docenti di Matematica (Canton Ticino), **52** (2006), 91-93.

Scimemi B. (1993). *Le frazioni continue rivisitate*, Atti del Quindicesimo Convegno sull'insegnamento della matematica, Notiziario UMI, Suppl. 5, maggio 1993.

Esistono in rete vari siti dedicati alle frazioni continue; suggeriamo di ricercare con Google la voce *frazioni continue*, oppure *continued fractions*.