Considerazioni di Galileo Galilei
Sopra le scoperte dei dadi (1612)

Che nel gioco dei dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è, il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi, che questi, il che dipende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3. e il 18. come punti, con tre numeri comporre, cioè questi con 6.6.6. e quelli con 1.1.1. e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi, che v.g. il 6. o il 7., li quali in più maniere si compongono, cioè il 6. con 1.2.3.e con 2.2.2. e con 1.1.4. ed il 7. con 1.1.5., 1.2.4, 1.3.3., 2.2.3. Tuttavia ancorché il 9. e il 12. in altrettante maniere si compongano in quante il 10. e l'11. perlochè d'equal uso devriano esser reputati; si vede non di meno, che la lunga osservazione ha fatto dai giocatori stimarsi più vantaggioso il 10. e l'11. che il 9. e il 12.

E che il 9. e il 10. si formino (e quel che di questi si dice intendasi de' lor sossopri 12. e 11.) si formino dico con pari diversità di numeri, è manifesto; imperocché il 9.si compone con 1.2.6., 1.3.5., 1.4.4., 2.2.5., 2.3.4., 3.3.3. che sono sei triplicità, ed il 10. con 1.3.6., 1.4.5., 2.2.6., 2.3.5., 2.4.4., 3.3.4. e non in altri modi, che pur son sei combinazioni. Ora io per servire a chi m'ha comandato, che io debba produr ciò, che sopra tal difficoltà mi sovviene, esporrò il mio pensiero, con isperanza, non solamente di scorre questo dubbio, ma di aprire la strada a poter puntualissimamente scorger le ragioni, per le quali tutte le particolarità del giuoco sono state con grande avvedimento e giudizio compartite ed aggiustate. E per condurmi colla maggior chiarezza che io possa la mio fine, comincio a considerare come essendo un dado, terminato da 6. facce, sopra ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi; sei vengono ad essere le sue scoperte, e non più, l'una differente dall'altra. Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado, che pure ha altre sei facce, potremo fare 36. scoperte tra di loro differenti, poiché ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo, ed in conseguenza fare 6. scoperte diverse [per ogni faccia scoperta del primo]; onde è manifesto tali combinazioni esser sei volte 6. cioè 36. E se noi aggiugneremo il terzo dado, perché ciascuna delle sue facce, che pur son sei, può accoppiarsi con ciascuna delle 36. scoperte degli altri due dadi, averemo le scoperte di tre dadi esser 6. volte 36. cioè 216. tutte tra di loro differenti. Ma perché i punti dei tiri di tre dadi non sono se non 16., cioè 3., 4., 5. sino a 18., tra i quali si hanno a compartire le dette 216.scoperte, è necessario, che ad alcuni di essi ne tocchino molte; e se noi ritroveremo quante ne toccano per ciascheduno, averemo aperta la strada di scoprire quanto cerchiamo, e basterà fare tale investigazione dal 3. sino al 10. perché quello che converrà a uno di questi numeri, converrà ancora al suo sossopra.

Tre particolarità si debbon notare per chiara intelligenza di quel che resta:

la *prima* è, che quel punto dei tre dadi, la cui composizione risulta da tre numeri eguali, non si può produrre, se non da una sola scoperta, ovvero tiro di dadi, e così il 3. non si può formare se non dalle tre facce dell'asso, ed il 6., quando si dovesse comporre con tre dui, non si farebbe se non da una sola scoperta.

Seconda: il punto, dai tre numeri, due dei quali sieno i medesimi, e i terzo diverso, si può produrre da tre scoperte, come v.g. il 4. che nasce dal 2 e dalli due assi, può farsi con tre cadute diverse, cioè quando il primo dado scopra 2. e il secondo e il terzo scuoprano asso; o scuoprendo il secondo dado 2., e il primo e il terzo asso; o scuoprendo il terzo 2., ed il primo e secondo asso. E così v.g. l'8. in quanto resulta da 3.3.2. può prodursi parimenti in tre modi; cioè scuoprendo il primo dado 2.e gli altri 3. per uno, o scuoprendo il secondo dado 2. ed il primo e terzo 3. o finalmente scuoprendo il terzo dado 2. ed il primo e secondo 3.

Terza: quel numero di punti, che si compone di tre numeri differenti, può prodursi in 6. maniere, come per esempio, l'8. mentre si compone da 1.3.4. si può fare con 6. scoperte differenti; prima, quando il primo dado faccia 1. Il secondo3.e il terzo 4.; seconda, quando il primo dado faccia pur 1. ma il secondo 4.e il terzo 3.; terza, quando il secondo dado faccia 1. e il primo 3. e il terzo 4.; quarta, facendo il secondo pur 1. e il primo 4. e il terzo 3.; quinta, quando facendo il terzo dado 1., il primo faccia 3.e il secondo 4.; sesta, quando sopra l'1. del terzo dado, il primo farà 4. e il secondo 3.

Abbiamo dunque sin qui dichiarati questi tre fondamenti, primo, che le triplicità, cioè il numero delle scoperte dei tre dadi, che si compongono da tre numeri eguali, non si producono se non in un modo solo; secondo, che le triplicità che nascono da due numeri uguali, e dal terzo differente, si producono in tre maniere; terzo, che quelle che nascono da tre numeri tutti differenti, si formano in sei maniere.

Da questi fondamenti facilmente raccorremo in quanti modi, o vogliam dire, in quante scoperte differenti si possono formare tutti i numeri [o punti] dei tre dadi, il che per la seguente tavola facilmente si comprende, in fronte della quale sono notati i punti dei tir dal 10. in giù sino al 3. E sotto essi le triplicità differenti, dalle quali ciascuno di essi può resultare, accanto alle quali son posti i numeri, secondo i quali ciascuna triplicità si può diversificare, sotto i quali è finalmente raccolta la somma di tutti i modi possibili a produrre essi tiri, come per esempio:

10	(*m*)	*9*	(*m*)	*8*	(*m*)	*7*	(*m*)	*6*	(*m*)	*5*	(*m*)	*4*	(*m*)	*3*	(*m*)
631	(6)	621	(6)	611	(3)	511	(3)	411	(3)	311	(3)	211	(3)	111	(1)
622	(3)	531	(6)	521	(6)	421	(6)	321	(6)	221	(3)				
541	(6)	522	(3)	431	(6)	331	(3)	111	(1)						
532	(6)	441	(3)	422	(3)	332	(3)								
442	(3)	432	(6)	332	(3)										
433	(3)	333	(1)												
(27)		(25)		(21)		(15)		(10)		(6)		(3)		(1)	(108)

Nella prima casella abbiamo il punto 10. e sotto di esso 6. triplicità di numeri, con i quali egli si può comporre, che sono 6.3.1., 6.2.2., 5.4.1., 5.3.2., 4.4.2., 4.3.3. E perché la prima triplicità 6.3.1. è composta di tre numeri diversi, può (come sopra si è dichiarato) esser fatta da 6. scoperte di dadi differenti; però accanto ad essa triplicità 6.3.1. si nota 6. Ed essendo la seconda 6.2.2. composta di due numeri eguali, e di un altro diverso, non può prodursi se non in 3. differenti scoperte, però se gli nota accanto 3. La terza triplicità 5.4.1., composta di tre numeri diversi può farsi da 6.scoperte, onde si nota con il numero 6. e così dell'altre tutte. E finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle scoperte è raccolta la somma di tutte: dove si vede, come il punto 10. Può farsi da 27. scoperte di dadi differenti ma il punto 9. [come il punto 12.] da 25 solamente, e l'8. da 21., il 7. da 15., il 6. da 10., il 5. da 6., il 4. da 3. e finalmente il 3.da 1., le quali tutte sommate insieme ascendono al numero di 108. Ed essendo altrettante le scoperte dei sossopra, cioè dei punti 11. 12.13. 14. 15. 16. 17. 18. si raccoglie la somma di tutte le scoperte possibile a farsi colle facce dei tre dadi, che sono 216. E da questa tavola potrà ognuno ch'intenda il giuoco andar puntualissimamente misurando tutti i vantaggi per minimi che sieno delle zare, degl'incontri, e di qualunque altra particolar regola, che in esso giuoco si osserva.

Commento di Mario Barra, 2007
Docente di Calcolo delle Probabilità
Dipartimento di Matematica della Facoltà di Scienze
Università di Roma "La Sapienza"

SOPRA LE SCOPERTE DE I DADI[1]

ARGOMENTO: viene determinata la probabilità delle possibili somme con tre dadi, numerati ciascuno da 1 a 6.

TESTO E COMMENTO[2]:*…ancor che il 9 e il 12 in altrettante maniere si componghino in quante il 10 e l'11, per lo che di eguale uso devriano esser reputati, si vede non di meno che la lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che il 9 e il 12.*

Galilei considera che, nella somma di tre dadi, sia il 9 che il 10 si ottengono con lo stesso numero di *triplicità*. (i valori visibili sui tre dadi). Infatti:
la somma 9 si compone con: 1.2.6; 1.3.5; 1.4.4; 2.2.5; 2.3.4, 3.3.3;
cioè con 6 triplicità.
la somma 10 si compone con: 1.3.6; 1.4.5; 2.2.6; 2.3.5; 2.4.4, 3.3.4;
sempre con 6 triplicità, e non in altri modi. Con questa premessa viene enunciato l'oggetto della sua ricerca:

IL PROBLEMA: lanciando 3 dadi, le somme 9 e 10 si ottengono con lo stesso numero di triplicità. Ma allora perché, in pratica, si osserva che è più frequente ottenere 10 piuttosto che 9?

Galilei dà la risposta al caso particolare in un quadro generale: *Ora io per servire a chi mi ha comandato*[3] *che io deva produr ciò che sopra tal difficoltà mi sovviene, esporrò il mio pensiero con speranza non solamente di scior questo dubbio ma di aprir la strada a poter puntualissimamente scorger le ragioni per le quali tutte le particolarità del giuoco sono state con grande avvedimento e giudizio comparite e aggiustate.*

Galilei, in tutto il suo lavoro[4], fa riferimento intuitivamente alla Legge dei Grandi Numeri (attraverso la probabilità si calcola che è sempre più probabile che la frequenza relativa tenda alla probabilità) e alla Legge Empirica del Caso (quanto affermato dalla teoria può essere verificato in pratica) . Infatti queste sono le sue prime parole:

"*Che nel gioco de' dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi che questi,*"

Galilei comincia l'analisi del problema elencando i casi possibili che sono le *scoperte di un dado* e intende che le sei scoperte di un dado sono "equiprobabili" perchè *egli può indifferentemente fermarsi, sopra ciascuna* delle 6 facce.

---

[1] Galilei G., "Sopra le scoperte de i dadi", *Le Opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale (E.N.) di A. Favaro, Tipografia La Barbera 1897, Firenze (1718), Vol. VIII, pag. 591-594. Poiché il lavoro è compreso in sole quattro pagine, non viene riportata, a fianco delle citazioni, la pagina del testo cui si fa riferimento. "Sopra le scoperte de i dadi" è stato probabilmente scritto negli anni tra il 1612 e il 1623, poco dopo l'arrivo di Galilei a Firenze.

[2] Il testo verrà indicato in carattere corsivo. Vengono aggiunte alcune sottolineature per facilitare l'individuazione degli aspetti importanti.

[3] Galileo interviene su richiesta di qualcuno che possiamo congetturare essere il Gran Duca di Toscana.

[4] Vedi anche, ad esempio, la prima citazione di Galilei riportata, in cui si fa riferimento alla *lunga osservazione*, i cui risultati verranno analizzati teoricamente.

Il testo prosegue considerando praticamente[5] che le scoperte dei singoli dadi sono logicamente indipendenti (tutte le combinazioni teoricamente possibili sono effettivamente possibili) e che per due e tre dadi, ci sono rispettivamente 36 e 216 casi possibili.

Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado,…, avvenga che ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo,…, onde è manifesto esser 6 vote 6, cioé 36. E se noi aggiungeremo un terzo dado,…, 6 volte 36, cioè 216, tutte fra di loro differenti. Ma perchè i punti non sono se non 16, cioè 3. 4. 5 etc. sino a 18, tra i quali si hanno a compartire le dette 216 scoperte, è necessario che ad alcuni di essi ne tocchino molte; e se noi ritroveremo quante ne toccano per ciascheduno, avremo aperta la strada di venire in notizia di quello che cerchiamo: e basterà far tale investigazione dal 3 sino al 10, perché quello che converrà ad uno di questi numeri, converrà ancora al suo sossopra.

Dunque per tre dadi ci sono 216 casi possibili. Ma poiché le somme differenti, che vanno da 3 a 18, sono 16, che non divide 216, è necessario che alcune somme siano più probabili di altre. Poiché infine su ogni dado la somma di due facce opposte è 7, su tre dadi tale somma vale 21. Dunque se la somma delle facce che vediamo vale: 3, 4, 5,…, 18, la somma delle facce opposte deve essere rispettivamente: 18, 17, 16, …, 3. Così infine, poiché il numero di modi per ottenere una certa somma S sulle facce visibili equivale al numero di modi per ottenere la somma 21-S sulle facce opposte (sossopra), sarà sufficiente analizzare i numeri dei modi per ottenere le somme da 3 a 10, perché contemporaneamente si avranno quelli dei *sossopra*: rispettivamente da 18 a 11.

Segue ora l'analisi del punto cruciale della questione, con la distinzione tra le possibili *triplicità* e l'indicazione dei loro 'anagrammi' possibili. Queste triplicità possono essere di tre tipi: quelle *che si compongono da 3 numeri eguali,* che si possono ottenere *in un modo solo*, quelle *che nascono da 2 numeri eguali e dal terzo differente* che *si producono in 3 maniere* (es.: la triplicità: 1.1.2 si può ottenere anche con: 1.2.1 e con 2.1.1) e *quelle che nascono da 3 numeri tutti differenti* che *si formano in 6 maniere* (es.: 1.2.3; 1.3.2; 2.1.3; 2.3.1; 3.1.2; 3.2.1). Per illustrare nei particolari le conseguenze delle sue analisi, Galilei produce la seguente tabella, dove in alto compaiono le somme possibili e in basso, i numeri dei modi, in totale, per ottenerle. Addizionando questi totali si ha la metà dei casi possibili: 27+25+21+15+10+6+3+1=108. I rimanenti si ottengono per i risultati sui loro *sossopri*.

10		9		8		7		6		5		4		3	
6.3.1	6	6.2.1	6	6.1.1	3	5.1.1	3	4.1.1	3	3.1.1	3	2.1.1	3	1.1.1	1
6.2.2	3	5.3.1	6	5.2.1	6	4.2.1	6	3.2.1	6	2.2.1	3		3		1
5.4.1	6	5.2.2	3	4.3.1	6	3.3.1	3	2.2.2	1		6				
5.3.2	6	4.4.1	3	4.2.2	3	3.2.2	3		10						
4.4.2	3	4.3.2	6	3.3.2	3		15								
4.3.3	3	3.3.3	1		21										
	27		25												

Dunque in particolare il problema posto inizialmente viene risolto. La somma 10 è più vantaggiosa perché:

- 10 si può ottenere come somma di: 6.3.1, 6.2.2, …, 4.3.3, e queste triplette si possono 'anagrammare' rispettivamente in: 6, 3, …, 3, modi, con un totale di 27 casi favorevoli;

[5] Esprimendosi in termini moderni.

- 9 si può ottenere come somma di: 6.2.1, 5.3.1, …, 3.3.3, che si possono 'anagrammare' rispettivamente in: 6, 6, …, 1, modi, con un totale di 25 casi favorevoli.
La prima somma è più frequente della seconda, perché ha due casi favorevoli in più.

In termini attuali possiamo dire che 10 ha probabilità 27/216 e 9, probabilità 25/216. Ci si può meravigliare del fatto che la *lunga osservazione* sia così precisa da riuscire a cogliere una differenza di probabilità di 2/216, che risulta minore di 1/100.
E' possibile soltanto dire che a quei tempi si giocava molto!

Infine Galilei conclude la sua analisi dicendo: *da questa tavola potrà ogn'uno che intenda il gioco, andar puntualissimamente compassando tutti i vantaggi, per minimi che sieno, delle zare, de gl'incontri e di qualunque altra particolar regola e termine che in esso giuoco si osserva, etc.*

CONCLUSIONI: Galilei calcola, di fatto, la probabilità delle possibili somme di tre dadi[6]. Il problema era già stato risolto da Cardano e forse Galilei può esserne venuto a conoscenza attraverso gli allievi di quest'altro grande risolutore di problemi probabilistici. Ma Galilei, al contrario di Cardano, esprime la soluzione con grande chiarezza, senza errori e con una visione, certamente ancora intuitiva, ma notevolmente unitaria e, si può dire, didattica, dei vari aspetti coinvolti. Così, nello spazio di soltanto quattro pagine, oltre alla soluzione del problema in oggetto e alla sua chiara analisi combinatoria, troviamo i prodromi positivi della definizione classica della probabilità, come rapporto fra casi favorevoli e casi possibili[7], purché questi siano*indifferenti*, e l'utilizzazione delle proprietà di indipendenza logica e di indipendenza stocastica.
Troviamo in particolare, come già detto, il collegamento fra teoria ed esperienza, con l'intuizione della Legge dei Grandi Numeri e della Legge Empirica del Caso.
Ma anche questo collegamento, sebbene con i limiti già espressi, è già presente in Cardano.

Invece, per quanto riguarda gli altri due lavori di Galilei, relativi al calcolo delle probabilità[8], i contributi di questo grande scienziato, possono essere considerati totalmente innovativi.

---

[6] Questo contributo di Galilei è noto e si trova su molti libri e articoli di storia della matematica e in particolare in: I. Todhunter, *A History of the Mathematical theory of Probability*, Macmillan, 1865. Ci piace indicare in particolare anche un lavoro di due grandi maestri di chi scrive: Lombardo Radice L., Segre B., "Galileo e la matematica", *Saggi su Galileo Galilei*, G. Barbera, Firenze, 1967. In questo lavoro vengono già trattati brevemente sia il problema dei dadi, sia quello della stima di un cavallo. Non si ha notizia invece di altre pubblicazioni che si riferiscano agli altri apporti di Galilei alla teoria del calcolo delle probabilità, trattati nel presente articolo (essenzialmente: descrizione qualitativa della distribuzione degli errori sperimentali e critica "anticipata" delle posizioni generali di Gauss).
[7] Definizione data nel 1700 da Jakob Bernoulli.
[8] Contributi che verranno analizzati qui di seguito.